TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HỒ CHÍ MINH
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

GIÁO TRÌNH

HÀM BIẾN PHỨC & PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Biên soạn : Ngô Hữu Tâm

(Lưu hành nội bộ-3/2016)

Lời mở đầu

Giáo trình "*Hàm biến phức và Phép biến đổi Laplace*" này được biên soạn nhằm phục vụ cho nhu cầu về tài liệu học tập của sinh viên Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật thành phố Hồ Chí Minh. *Nội dung giáo trình này gồm 7 chương:*

Chương 1 : *Số phức và mặt phẳng phức.*
Chương 2 : *Hàm biến phức.*
Chương 3: *Đạo hàm của hàm biến phức.*
Chương 4: *Tích phân của hàm biến phức.*
Chương 5: *Chuỗi hàm biến phức.*
Chương 6: *Thặng dư và ứng dụng.*
Chương 7: *Phép biến đổi Laplace và ứng dụng.*

Với nội dung như trên mà thời lượng dành cho môn học này **chỉ có 30 tiết** là quá eo hẹp. Do đó, tác giả cố gắng đưa vào giáo trình này khoảng 40%-50% bài tập dạng trắc nghiệm để giáo viên chỉ cần ít thời gian mà vẫn có thể giúp các bạn sinh viên nắm vững được nội dung phong phú của môn học. Phần bài tập trắc nghiệm được tách riêng để thuận tiện cho việc sử dụng.

Trước mỗi chương tác giả nêu ra những nội dung, những kiến thức cơ bản mà sinh viên cần phải đạt được. Dựa vào đó mà các bạn sinh viên biết được mình sẽ phải học những gì, cần phải hiểu rõ những khái niệm nào, những nội dung nào cần phải nắm vững và những bài toán dạng nào phải làm được. Trong mỗi chương, tác giả đưa vào khá nhiều ví dụ phù hợp để minh họa và làm sáng tỏ các khái niệm vừa được trình bày .

Sau mỗi chương có phần bài tập được chọn lọc phù hợp để sinh viên tự luyện tập nhằm đạt được sự hiểu biết sâu rộng hơn các khái niệm đã đọc qua và thấy được các ứng dụng rộng rãi của các kiến thức này vào thực tế.

Tuy có rất nhiều cố gắng trong công tác biên soạn, nhưng chắc chắn giáo trình này vẫn còn rất nhiều thiếu sót. Chúng tôi xin trân trọng tiếp thu ý kiến đóng góp của bạn đọc và các đồng nghiệp để giáo trình này ngày càng hoàn thiện hơn.

Thư góp ý xin gửi về : Ngô Hữu Tâm
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh
Khoa Khoa học Cơ bản

Bộ môn Toán
Email: tamnh@hcmute.edu.vn
huutamngo@yahoo.com.vn

Chương 1

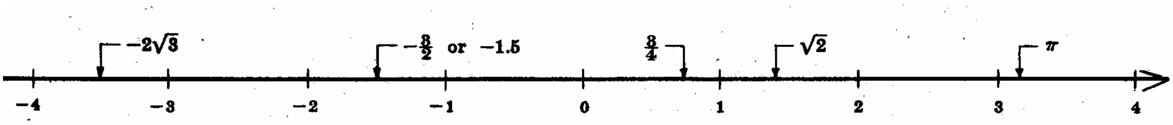
SỐ PHỨC VÀ MẶT PHẲNG PHỨC

Trong chương này , bạn sẽ học:

- Khái niệm về tập số phức, tập số phức là mở rộng của tập số thực.
- Các dạng số phức: Hình học, đại số, lượng giác, mũ.
- Các phép toán số phức: Cộng , trừ, nhân , chia, lũy thừa , khai căn, và quan hệ bằng nhau.
- Mặt phẳng phức , một số khái niệm trong mặt phẳng phức.

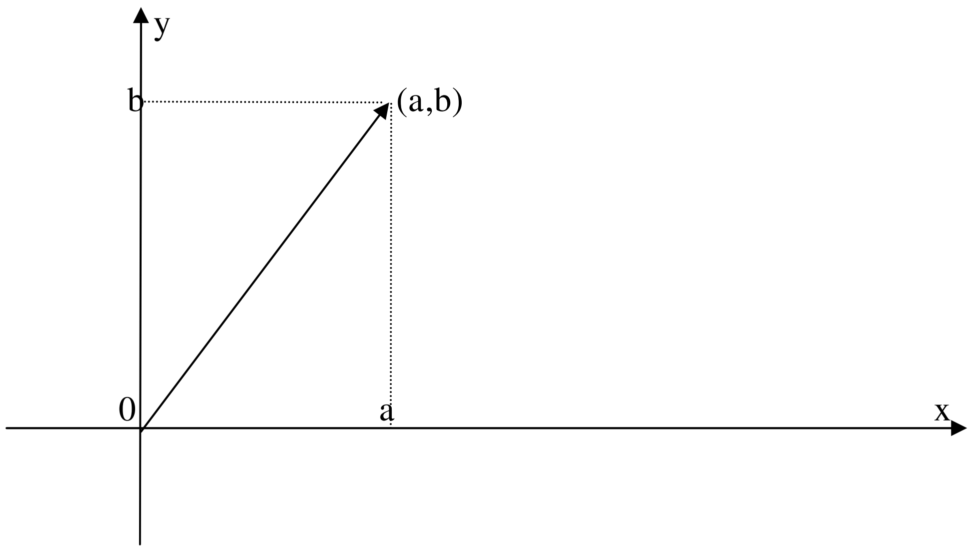
§1. SỐ PHỨC

Bạn đọc đã quen thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ cùng với các phép toán cộng, trừ, nhân, chia,.... và những tính của chúng như giao hoán, kết hợp, phân phối...... Về mặt hình học, tập các số thực được biểu diễn bởi các điểm trên đường thẳng, gọi là trục số thực (trục 0x) như hình vẽ sau



Với mỗi $a \in \mathbb{R}$, a được biểu diễn tương ứng với một điểm trên trục 0x cách gốc 0 một đoạn $|a|$, nằm về phía bên phải của gốc 0 nếu a > 0, nằm về phía bên trái của gốc 0 nếu a< 0. Mỗi số thực tương ứng với một điểm trên trục 0x và ngược lại.

Lấy trục số thực 0x đặt vào mặt phẳng với hệ trục tọa Đề-các Oxy sao cho trục thực 0x trùng với trục 0x của mặt phẳng Oxy (cách làm này gọi là phép nhúng).



Bây giờ, xét mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy thì mỗi số thực a tương ứng với một điểm có tọa độ (a,0) nằm trên trục 0x. Sau đây, chúng ta sẽ mở rộng tập các số thực (trục 0x) sang tập các số phức (mặt phẳng 0xy).

1. Định nghĩa số phức (complex numbers)

Trên tập hợp $\mathbb{C} := \{z = (a,b) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}^2$ mà quan hệ bằng nhau, phép cộng, phép nhân, phép đồng nhất những cặp số đặc biệt với số thực được định nghĩa như sau: $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$.

i) Quan hệ bằng nhau: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

ii) Phép cộng : (a,b) + (c,d) = (a+c , b+d)

iii) Phép nhân : (a,b).(c,d) = (ac-bd, ad+bc)

iv) Phép đồng nhất : (a, 0) ≡ a (mỗi số nằm trên trục thực 0x xem như một số thực)

Tập $\mathbb{C}$ với các phép toán định nghĩa như trên tạo thành một trường số gọi là trường số phức. Trong trường số phức $\mathbb{C}$, ta có:

- Phần tử đối của z = (a, b) , ký hiệu –z, là –z = (-a,-b).
- Phần tử zêro là (0,0) ≡ 0. (có thể sử dụng dấu "=" thay cho dấu "≡")
- Phần tử nghịch đảo của z = (a,b) ≠ 0, ký hiệu z^{-1}, là $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$.
- Phần tử đơn vị thực là (1,0) = 1.
- Phần tử đơn vị ảo, ký hiệu i, là **i = (0,1) ; ta được i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.**

$$\boxed{i = (0,1) \quad \text{và} \quad i^2 = -1} \qquad (1.1)$$

Mỗi số phức z = (a,b) có thể xem như một điểm hay một véctơ có tọa độ là (a,b) trong mặt phẳng 0xy. Các tính chất của các phép toán số phức hoàn toàn tương tự các tính chất của các phép toán số thực.

2. Dạng đại số của số phức

Mọi số phức z = (a, b) đều có thể viết được dưới dạng z = a+ib, và gọi là dạng đại số của số phức.

Thật vậy, z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a+ ib.

- a gọi là phần thực của số phức z, ký hiệu Rez.
- b gọi là phần ảo của số phức z, ký hiệu Imz.

Vậy $z = (a, b) = a+ib = \text{Rez} + i\,\text{Imz}$ (1.2)

3. Các phép toán số phức viết dạng đại số

Với mọi $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id \in \mathbb{C}$

i) Phép cộng: $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$

ii) Phép trừ: $z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$

iii) Phép nhân: $z_1 . z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

iv) Phép chia: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = z_1 z_2^{-1}$, với $z_2 \neq 0$.

v) Quan hệ bằng nhau: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

✻ Nhận xét:

- Khi cộng (trừ) hai số phức dạng đại số, ta cộng (trừ) phần thực với phần thực và phần ảo với phần ảo.
- Khi nhân hai số phức dạng đại số, ta áp dụng tính phân phối bình thường như số thực và nhớ thay $i^2 = -1$.
- Khi chia hai số phức dạng đại số, ta nhân cả tử và mẫu với lượng liên hiệp của mẫu số.

<u>Ví dụ 1.1</u> Tìm phần thực và phần ảo số phức: $z = \frac{1+2i}{2-3i} + 4 + 6i$

<u>Giải</u>

Ta có

$$z = \frac{(1+2i)(2+3i)}{2^2 - 3^2 i^2} + 4 + 6i = \frac{2+6i^2+7i}{13} + 4 + 6i = \left(\frac{-4}{13} + 4\right) + i\left(\frac{7}{13} + 6\right) = \frac{48}{13} + i\frac{85}{13}$$

Vậy $\text{Rez} = \frac{48}{13}$, $\text{Imz} = \frac{85}{13}$. ◆

4. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của số phức $z = a + ib$, ký hiệu $\bar{z}$, và định nghĩa như sau

$$\boxed{\bar{z} := a - ib} \quad (1.3)$$

✻ **Một số tính chất:** Với mọi $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$; $\overline{z^k} = \left(\bar{z}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$

iii) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, với $z_2 \neq 0$.

iv) $\overline{\alpha} = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

v) $\overline{\overline{z}} = z$

<u>Ví dụ 1.2</u> Cho đa thức bậc n hệ số thực $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_o$

Tức là $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0,1,2,...,n$ và $a_n \neq 0$. Giả sử $f(z_o) = a+ib$, hãy tính $f(\overline{z_o})$.

<u>Giải</u>

Ta có $a_n z_o^n + a_{n-1} z_o^{n-1} + ... + a_1 z_o + a_o = f(z_o) = a+ib$

$$f(\overline{z_o}) = a_n \left(\overline{z_o}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{z_o}\right)^{n-1} + ... + a_1 \overline{z_o} + a_o$$

$$= \overline{a_n}\ \overline{z_o^n} + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z_o^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\ \overline{z_o} + \overline{a_0} \qquad \text{(do tính chất (ii) và (iv))}$$

$$= \overline{a_n z_o^n} + \overline{a_{n-1} z_o^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z_o} + \overline{a_0} \qquad \text{(do tính chất (ii))}$$

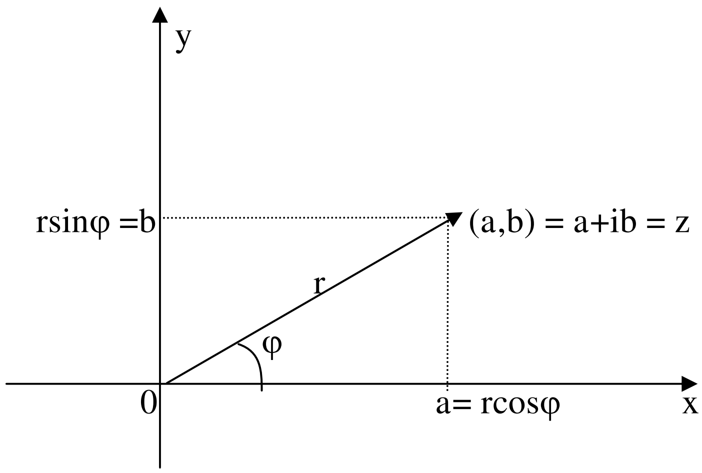
$$= \overline{a_n z_o^n + a_{n-1} z_o^{n-1} + ... + a_1 z_o + a_o} = \overline{a+ib} = a - ib \qquad \text{(do(i) và giả thiết)} \quad \blacklozenge$$

✻ <u>Nhận xét</u>

Cho phương trình bậc n hệ số thực $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_o = 0$ (1) , $a_n \neq 0$.

- ♦ Khi $a + ib = 0$ thì $a - ib = 0$. Do đó, nếu z_o là nghiệm của phương trình (1) thì $\overline{z_o}$ cũng là nghiệm phương trình (1).
- ♦ Nếu n lẻ thì phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm thực.

<u>5 - Dạng lượng giác của số phức</u>



Chúng ta thấy rằng mỗi số phức z = a+ib = (a,b) tương ứng với một vectơ có gốc là gốc tọa độ và ngọn là điểm có tọa độ (a,b). Để đơn giản ta gọi véctơ này là

vectơ z. Gọi r là môđun véctơ z và φ là góc giữa trục 0x và véctơ z. Từ nhận xét này chúng ta sẽ thiết lập dạng lượng giác (dạng cực) của số phức như sau.

5.1- Mô-đun của số phức

Cho số phức z = a + ib . Mô-đun của z, ký hiệu |z| và định nghĩa bởi

$$\boxed{|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = r} \qquad (1.4)$$

Ví dụ 1.3 Với z = 4 – 3i thì $|z| = = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ ◆

∗ *Một số tính chất*: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

i) $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ii) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (BĐT tam giác)

iii) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2|$

iv) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

v) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

5.2- Argument của số phức

Cho số phức $z = a + ib \neq 0$, $r = |z|$

♦ Giá trị chính của argument của số phức z là góc φ (-π < φ ≤ π) thỏa z = r(cosφ + isinφ), ký hiệu Argz . Cụ thể Argz được tính như sau:

$$\text{Arg } z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a} & \text{khi } a > 0, \forall b \in R \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a} & \text{khi } a < 0 \text{ và } b \geq 0 \\ -\pi + arctg\dfrac{b}{a} & \text{khi } a < 0 \text{ và } b < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{khi } a = 0 \text{ và } b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{khi } a = 0 \text{ và } b < 0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

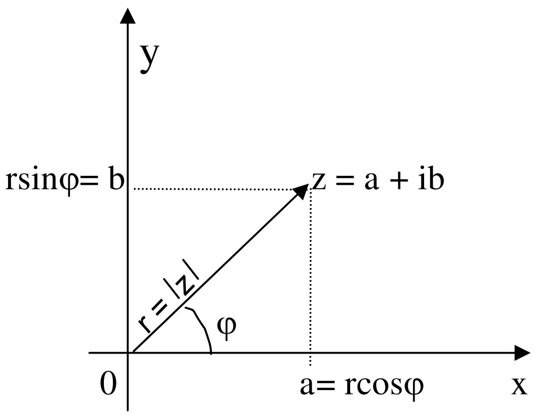
♦ Argument của z, ký hiệu argz:

$$\arg z := \text{Arg}z + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad (1.6)$$

∗ **Chú ý**

- Một số tài liệu dùng argz để ký hiệu giá trị chính và Argz để ký hiệu argument.
- Có thể qui định giá trị chính của argument trong khoảng [0; 2π).

5.3 - Dạng lượng giác của số phức Cho số phức $z = a + ib \neq 0$



- $\varphi = \arg z$ (hay $\varphi = \operatorname{Arg} z$)
- $a = r\cos\varphi$
- $b = r\sin\varphi$

Khi đó $\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ (1.7)

gọi là **dạng lượng giác** của số phức. ■

∗ **Chú ý** Chúng ta thường tìm dạng lượng giác của số phức $z = a + ib \neq 0$ qua hai bước sau:

Bước 1 Tính $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Bước 2 Tìm một góc φ thỏa $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

Khi đó dạng lượng giác của z là : $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Ví dụ 1.4 Viết số phức $z = 1+i\sqrt{3}$ đưới dạng lượng giác.

Giải

Modun $r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \to \text{chọn } \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Vậy $z = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$ ◆

6. Lũy thừa bậc n số phức- Công thức Moivre

Cho các số phức

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,..., $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$.

Khi đó $z_1z_2 = r_1.r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)]$

$= r_1.r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

Tương tự $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$, với $z_2 \neq 0$.

∗ Suy ra : $z_1z_2 ...z_n = r_1r_2...r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)]$

Nếu $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ta được công thức lũy thừa bậc n số phức

$$\boxed{z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ \forall n \in \mathbb{Z}} \quad (1.8)$$

Khi r = 1 ta có **Công thức Moivre**

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ \forall n \in \mathbb{Z}} \quad (1.9)$$

Ví dụ 1.5 Tính và viết kết quả dưới dạng đại số phức $(1+i\sqrt{3})^{2017}$.

Giải

Đặt $z = 1+i\sqrt{3} = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$. Khi đó

$$(1+i\sqrt{3})^{2017} = z^{2017} = 2^{2017}\left(\cos\frac{2017\pi}{3} + i\sin\frac{2017\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{2017}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{2017}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{2016}(1+i\sqrt{3})$$ ◆

7 - Khai căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức z , ký hiệu $\sqrt[n]{z}$, là số phức w thỏa mãn $w^n = z$.

Dễ thấy $\sqrt[n]{0} = 0$.

Đặt các số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ta có

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = w^n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + 2k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \text{ với } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Nếu gọi $\sqrt[n]{r}$ là căn bậc n duy nhất (dương) của số thực dương r, ta được:

$$\sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{r}[\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}] = \sqrt[n]{r}[\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n})],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Do các hàm cos, sin tuần hoàn chu kỳ 2π nên ta được

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right);\ k = 0,1,2,\dots, n-1;\quad n \in \mathbb{N}^+ \qquad (1.10)$$

(chỉ cần lấy n giá trị nguyên liên tiếp của k)

✻ **Nhận xét** Căn bậc n của một số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ có tất cả n giá trị, chúng có biểu diễn hình học là n đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn tâm 0 bán kính là $\sqrt[n]{r}$.

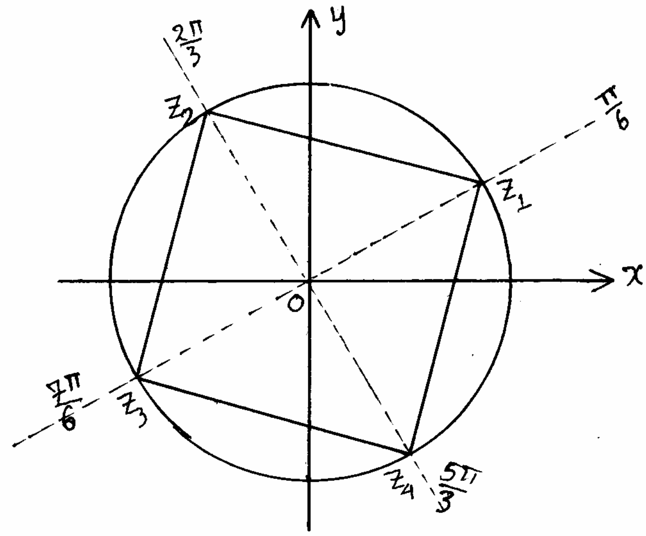
Ví dụ 1.6 Khai căn bậc 4 số phức $z = -1 + i\sqrt{3}$ và biểu diễn các kết quả lên mặt phẳng phức.

Giải

Mođun $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\text{Arg}z = \pi + \text{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Suy ra $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right] \overset{\text{đặt}}{=} z_k$,

với k = 0, 1, 2, 3. Biểu diễn hình học các kết quả như sau:



◆

8 - Công thức Euler- Dạng mũ của số phức

✻ Công thức **Euler**: $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (1.11)

✻ Dạng mũ của số phức: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ (1.12)

Cho $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

Khi đó $z_1 z_2 = r_1 r_2 . e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} . e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Ví dụ 1.7 $z = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ◆

BÀI TẬP

Bài 1.1 Tìm phần thực và phần ảo số phức

a) $z = \frac{1}{1-5i} + e^{-i+3}$ b) $z = (3-2i)^3 + \frac{1}{1+3i}$ c) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} + \overline{\left(\frac{1-2i}{3+i}\right)}$

Bài 1.2 Chứng minh:

a) $\forall z \neq 0$ thì $\text{Re}z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{|z|^2}{z}\right)$; $\text{Im}z = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{|z|^2}{z}\right)$

b) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$. Giải thích ý nghĩa hình học của kết quả này.

c) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

d) Nếu $z = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ thì

$z^n = r^n(\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi \pm k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi \pm k2\pi}{n})$ với k = 0,1,2,..., n-1(chỉ cần lấy n giá trị nguyên liên tiếp của k) ,$n \in \mathbb{N}^+$

Bài 1.3 Tìm các số thực x,y sao cho:

a) $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$

b) $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - i(y - x + 3)$.

Bài 1.4 Viết các số phức sau đây dưới dạng lượng giác và dạng mũ.

a) $z = -8i$ **b)** $z = 1 - i\sqrt{3}$ **c)** $z = -\sqrt{3} - i$

d) $z = 32$ **e)** $z = -2 + 2i$ **f)** $z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Bài 1.5 Viết các số phức sau đây đưới dạng đại số.

a) $\frac{-2+i}{4-3i}$ b) $(1+i\sqrt{3})^6$ c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$

d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ e) $\sqrt[4]{3-i\sqrt{3}}$ f) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$

g) $(-1+i)^7$ h) $\left(-8-8\sqrt{3}\,i\right)^{1/4}$

Bài 1.6 Giải các phương trình sau đây:

a) $z^2 + (i-2)z + (3-i) = 0$

b) $\frac{z+i}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}+i}{z}$

c) $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$

d) $z^3 - 2z - 4 = 0$

e) $5iz^2 - 4z + 4i = 0$

f) $z^4 + z^2 + 1 = 0$

g) $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

h) $z^4 - z^2 - 2z + 2 = 0$

i) $z^2(1-z^2) = 16$

Bài 1.7 Cho phương trình: $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_o = 0$ (1); $a_k \in R$, $k = 0,1,2,\dots,n$ và $a_n \neq 0$. Chứng minh rằng nếu z_o là nghiệm của phương trình (1) thì $\overline{z_o}$ cũng là nghiệm của (1).

Bài 1.8 Cho đa thức $f(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_o$ với $a_k \in R$, $k = 0,1,2,\dots,n$. Giả sử $f(3+2i) = 1 - 2i$, hãy tính $f(3-2i)$.

Bài 1.9 Chứng minh rằng : $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, với $z \neq 1$. Từ đó suy ra đẳng thức lượng giác Lagrange :

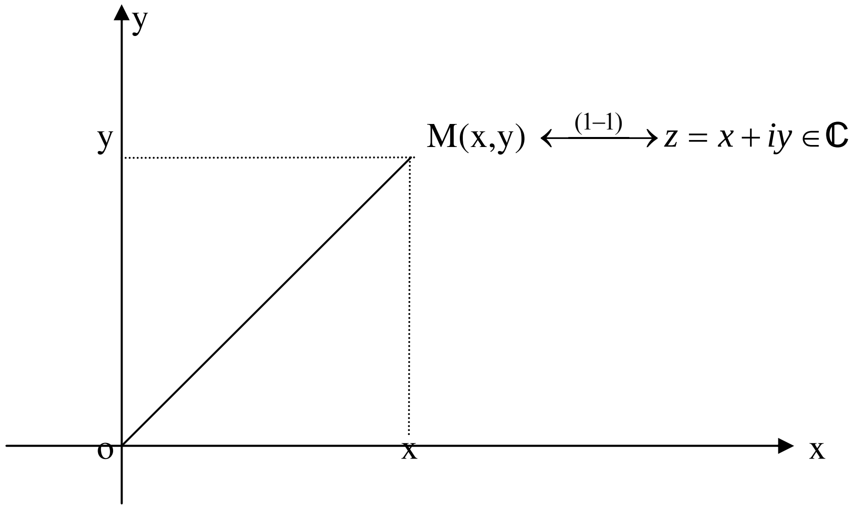
$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2\sin(\theta/2)}.$$

§2. MẶT PHẲNG PHỨC

1. Mặt phẳng phức

✻ **Số phức vô cùng:** Cho số phức z = a +ib . Khi a = ∞ hay b = ∞ thì ta nói z là số phức vô cùng và ta ghi z = ∞.

✻ **Mặt phẳng phức:**



Cho mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đề-các 0xy. Ứng với mỗi điểm M(x,y), ta liên kết với một số phức duy nhất z = x + iy. Khi đó mặt phẳng 0xy gọi là mặt phẳng phức và ta thường gọi là mặt phẳng z hay mặt phẳng phức ℂ (còn gọi là mặt phẳng hở).

Mặt phẳng kín, ký hiệu $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{C}} \overset{\text{ĐN}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Vậy mặt phẳng phức có thêm các điểm ∞ gọi là mặt phẳng kín.

✻ **Khoảng cách trong mặt phẳng phức:**
Trong mặt phẳng phức cho hai điểm $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó khoảng cách giữa z_1 và z_2 là

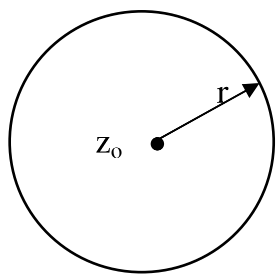
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. Một số khái niệm trong mặt phẳng phức

2.1- Hình tròn mở, hình tròn đóng

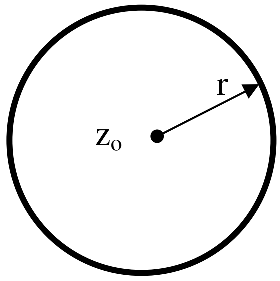
✻ **Hình tròn mở:** Hình tròn mở tâm z_o bán kính r > 0, ký hiệu $B(z_o,r)$, và định nghĩa bởi

$$B(z_o, r) := \{z \,/\, |z - z_o| < r\}$$



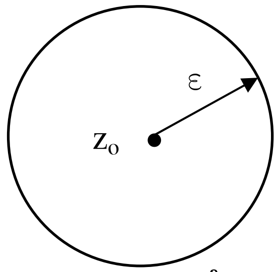
✻ Hình tròn đóng: Hình tròn đóng tâm z_o bán kính $r > 0$, ký hiệu $\overline{B(z_o, r)}$ và định nghĩa bởi

$$\overline{B(z_o, r)} := \{z \,/\, |z - z_o| \le r\} \qquad (\text{ hình tròn có lấy biên })$$



✻ ε- lân cận: Cho $\varepsilon > 0$ bé. Khi đó hình tròn $B(z_o, \varepsilon)$ gọi là ε-lân cận của z_o.

$$B(z_o, \varepsilon) := \{z \,/\, |z - z_o| < \varepsilon\}$$



<u>2.2-Điểm trong, điểm biên, điểm tu</u> Cho E là tập hợp trong mặt phẳng phức.

♦ Điểm z_o gọi là **điểm trong** của E nếu $\exists r > 0$ sao cho $B(z_o, r) \subset E$.

♦ Điểm z_o gọi là **điểm biên** của E nếu $\forall r > 0$, hình tròn mở $B(z_o, r)$ chứa điểm thuộc E và điểm không thuộc E. Tập tất cả các điểm biên của E ký hiệu là ∂E. Bao đóng của E, ký hiệu $\overline{E}$, $\overline{E} := E \cup \partial E$. (<u>Lưu ý</u> điểm biên của E có thể không thuộc E)

♦ Điểm z_o gọi là **điểm tụ** của E nếu $\forall r > 0$ hình tròn mở $B(z_o, r)$ chứa vô số điểm thuộc E. (<u>Lưu ý</u> điểm tụ của E có thể không thuộc E)

<u>2.3-Tập đóng, tập mở, tập bị chặn, tập compact, tập liên thông</u>

Cho E là tập hợp trong mặt phẳng phức

♦ Tập E gọi là tập mở nếu mọi điểm thuộc E đều là điểm trong của E.

♦ Tập E gọi là tập đóng nếu E chứa mọi điểm biên của nó.

♦ Tập E gọi là tập bị chặn (giới nội) nếu $\exists R > 0$ sao cho $E \subset B(0, R)$.

♦ Tập đóng và bị chặn gọi là tập compact.

♦ Tập E gọi là tập liên thông nếu mỗi cặp điểm z_1, z_2 bất kỳ thuộc E luôn tồn tại một đường liên tục trong E nối z_1 với z_2.

<u>2.4- Miền, miền đơn liên, miền đa liên</u>

Cho $D \neq \varnothing$ là tập hợp trong mặt phẳng phức.

j) Tập D gọi là một miền nếu D là tập mở và liên thông.

ii) Nếu D là một miền thì $\overline{D} = D \cup \partial D$ gọi là miền kín (miền đóng).

iii) Miền D gọi là *miền đơn liên* nếu biên của D chỉ gồm một thành phần liên thông. Miền không đơn liên gọi là *miền đa liên* (biên của nó có từ hai thành phần liên thông trở lên).

Bài tập

Bài 1.10

a) Biểu diễn các số phức sau đây trên cùng một mặt phẳng phức: $3+5i$, $2(3+5i)$, $\frac{1}{2}(3+5i)$, $\frac{1}{2}(3+5i)e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\frac{1}{2}(3+5i)e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) Biểu diễn các số phức sau đây trên cùng một mặt phẳng phức: $a+ib$, $2(a+ib)$, $\frac{1}{2}(a+ib)$, $\frac{1}{2}(a+ib)\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $r(a+ib)$, $r(a+ib)\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $r(a+ib)\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $r(a+ib)\,e^{i\theta}$ (với $a>0, b>0, r>0)$.

Bài 1.11 Nêu ý nghĩa hình học của các tập hợp điểm trong mặt phẳng phức thỏa các hệ thức sau.

a) A = $\{z \,/\, |z - z_1| = |z - z_2| \;,\; z_1 \neq z_2\}$

b) B = $\{z \,/\, |z - 1 + i| \leq 5\}$

c) C = $\{z \,/\, |z + 2 - i| + |z - 2 + i| = 6\}$

d) D = $\{z \,/\, |z + 3 - i| + |z - 3 + i| < 12\}$

e) E = $\{z \,/\, \big||z+2| - |z-2|\big| = 6\}$

f) F = $\{z \,/\, \arg(z+i) = \frac{\pi}{4}\}$

g) G = $\{z \,/\, \operatorname{Im} z \leq 2\}$

h) H = $\{z \,/\, |z - z_0| + |z + z_0| \leq 2a \;,\; |z_0| < a \in R\}$

Với mỗi tập hợp trên, hãy cho biết chúng có tính chất nào sau đây: Đóng, mở, bị chặn, compăct, liên thông, miền.

Bài 1.12 Nêu ý nghĩa hình học của các tập hợp điểm trong mặt phẳng phức thỏa các hệ thức sau.

a) A = $\{z \,/ |z - 1 + 2i| \leq 3\}$

b) B = $\{z \,/ |z + 2 - i| + |z - 2 + i| \leq 6\}$

c) C = $\{z : |z + 1 - 2i| \geq 2\}$

d) D = $\{z : 1 < |z + 2i| \leq 4\}$

e) E = $\{z : \arg(z - i) = \frac{\pi}{4}\}$

f) F = $\{z : -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$

Với mỗi tập hợp trên, hãy cho biết chúng có tính chất nào sau đây: Đóng, mở, bị chặn, compăct, liên thông, miền.

Chương 2

HÀM BIẾN PHỨC

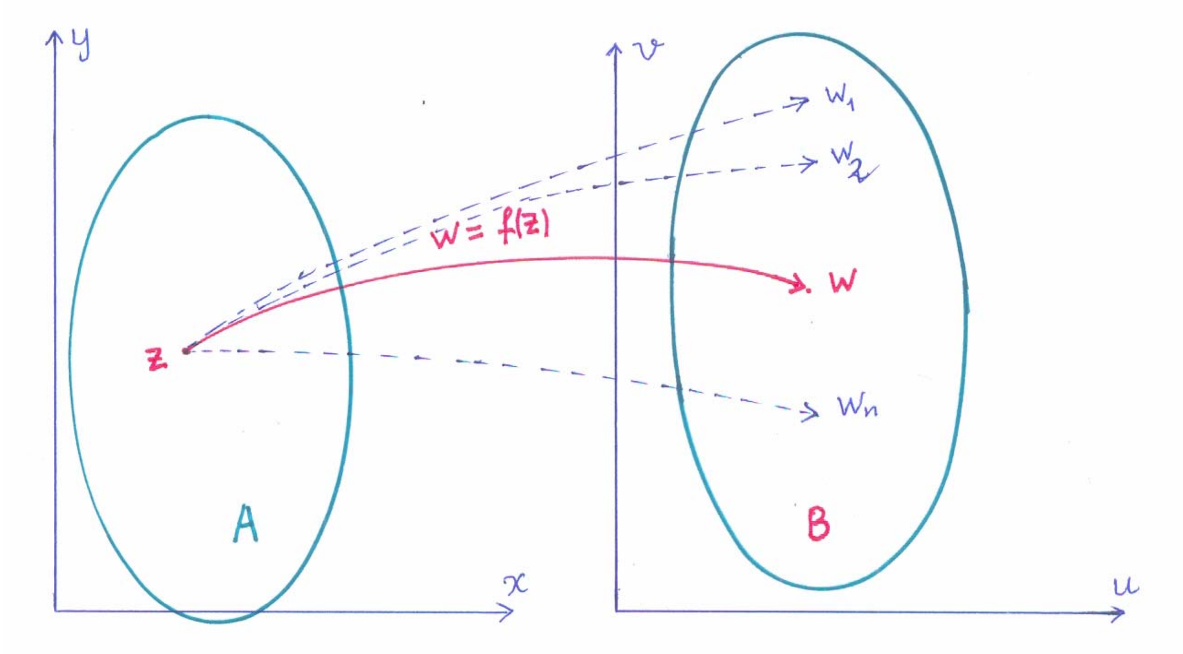
Trong chương này, bạn sẽ học:

- **Khái niệm hàm biến phức.**
- **Phần thực và phần ảo của hàm biến phức.**
- **Phép biến hình thực hiện bởi hàm biến phức.**
- **Giới hạn và liên tục của hàm biến phức.**
- **Các hàm số sơ cấp cơ bản.**

....

1. Định nghĩa hàm biến phức

Giả sử A là tập hợp điểm trong mặt phẳng phức z. Nếu có một qui tắc f mà mỗi số phức $z \in A$, tương ứng với một hoặc nhiều số phức xác định w, thì ta nói trên tập A đã xác định một hàm biến phức w = f(z).



- Nếu mỗi số phức $z \in A$, tương ứng với duy nhất một số phức xác định w, thì ta nói w = f(z) là hàm đơn trị.
- Nếu mỗi số phức $z \in A$, tương ứng với hai hay nhiều số phức xác định w, thì ta nói w = f(z) là hàm đa trị.
- Nếu w = f(z) là hàm biến phức xác định trên tập A thì A gọi là miền xác định và tập $B = \{ w \,/\, \exists z \in A \text{ thỏa } f(z) = w \}$ gọi là miền giá trị của hàm biến phức w = f(z).

- Sau này, khi nói đến một hàm phức w = f(z) mà không nói rõ gì thêm thì ta xem đó là hàm đơn trị.

Ví dụ 2.1

a) Hàm $w = z^2$ là hàm đơn trị xác định trên toàn mặt phẳng.

b) Hàm $w = \sqrt{z}$ là hàm hai trị xác định trên toàn mặt phẳng.

c) Hàm $w = \dfrac{z}{z^2+1}$ là hàm đơn trị xác định trên toàn mặt phẳng trừ hai điểm ivà –i.

d) Hàm $w = \sqrt[3]{2iz+3} + \dfrac{1}{z-i}$ là hàm ba trị xác định trên toàn mặt phẳng trừ điểm i.

∗ Hàm ngược

Giả sử w= f(z) là một hàm biến phức có miền xác định là tập A và miền giá trị là tập B. Khi đó , mỗi $w \in B$, tương ứng với một hoặc nhiều giá trị $z \in A$ sao cho f(z) = w. Như vậy trên tập B đã xác định một hàm phức z = g(w) biến tập B thành tập A, hàm này gọi là hàm ngược của hàm w = f(z).

Ví dụ 2.2 Hàm $w = \sqrt[3]{z}$ và $w = z^3$ là hai hàm ngược của nhau.

2. Phần thực và phần ảo của hàm biến phức

Cho hàm biến phức W = f(z), tức là cho phần thực u và phần ảo v của w. Nếu z = x + iy thì u và v là hai hàm thực của hai biến số độc lập x và y. Tóm lại, cho hàm phức w = f(z), tương ứng cho hai hàm thực u = u(x, y) ; v = v(x, y).

$$\boxed{w = f(z) \overset{z=x+iy}{\Leftrightarrow} w = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (2.1)}$$

Ví dụ 2.3 Tìm phần thực và phần ảo của các hàm phức:

a) $w = \dfrac{1}{z}$

b) $w = z^2 + 2i\bar{z}$

Giải

a) $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

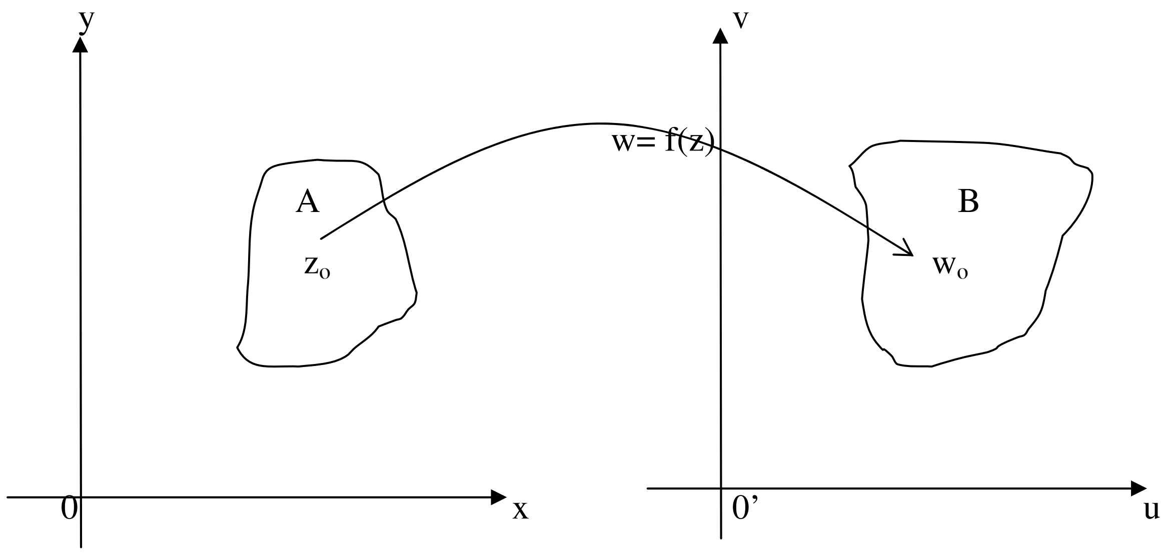
Vậy phần thực $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ và phần ảo $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

b) $w = (x+iy)^2 + 2i(x-iy) = x^2 - y^2 + 2ixy + 2ix + 2y = (x^2 - y^2 + 2y) + i(2xy + 2x)$

Vậy phần thực $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$ và phần ảo $v(x,y) = 2xy + 2x$

3. Phép biến hình thực hiện bởi một hàm biến phức

Giả sử w= f(z) là một hàm biến phức có miền xác định là tập A trong mặt phẳng z (mặt phẳng 0xy) và miền giá trị là tập B trong mặt phẳng w (mặt phẳng 0'uv). Khi đó ta nói hàm w = f(z) thực hiện một phép biến hình từ tập A trong mặt phẳng z lên tập B trong mặt phẳng w.



Hình 2.1

Ví dụ 2.4 Tìm ảnh của các tập hợp điểm sau đây qua phép biến hình $w = z^3$.

a) Điểm $z_o = 1-i$.

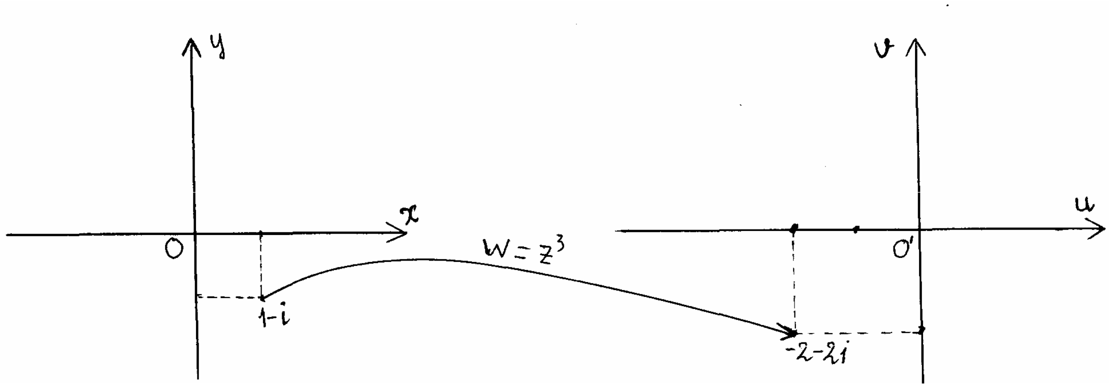
b) Đường tròn $|z| = r$.

c) Tia $\arg z = \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{3})$.

d) Miền hình quạt $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$.

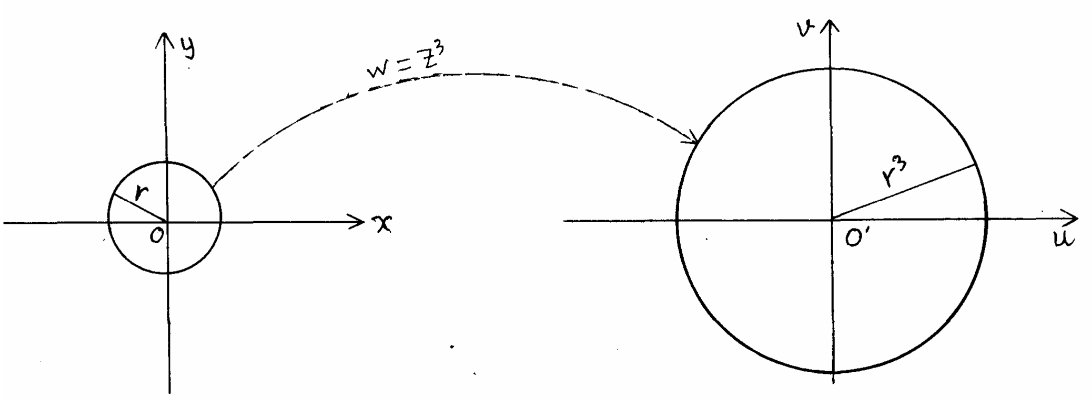
Giải

a) Với $z_o = 1-i \Rightarrow w_o = (1-i)^3 = -2-2i$.



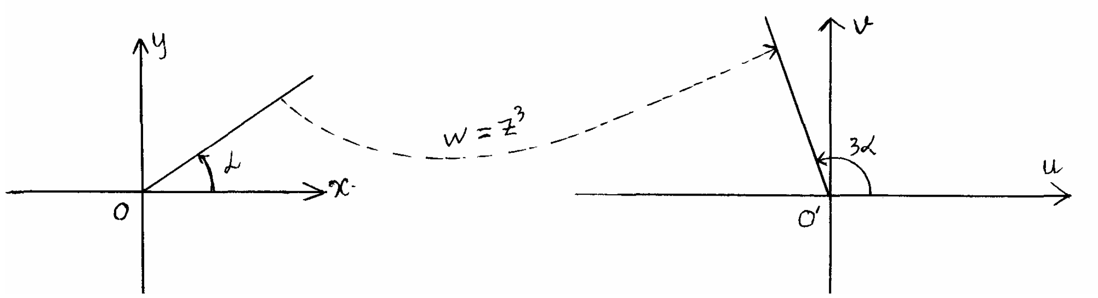
Hình 2.2a

b) Với $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow w = z^3 = r^3(\cos3\varphi + i\sin3\varphi)$. Suy ra $|z| = r$ thì $|w| = r^3$. Vậy ảnh của đường tròn bán kính r là đường tròn bán kính r^3.



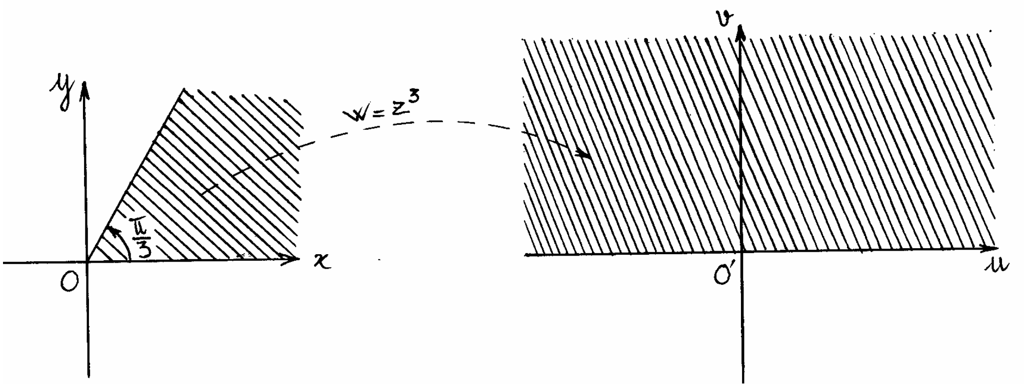
Hình 2.2b

c) $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow w = z^3 = r^3(\cos3\alpha + i\sin3\alpha)$. Suy ra ảnh của tia $\arg z = \alpha$ là tia $\arg w = 3\alpha$.



Hình 2.2c

d) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow w = z^3 = r^3(\cos3\varphi + i\sin3\varphi)$. Mà $0 < r < \infty$ thì $0 < r^3 < \infty$; $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{3}$ thì $0 < 3\varphi < \pi$. Vậy ảnh của miền hình quạt $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ là nửa mặt phẳng phía trên trục thực 0'u.



Hình2.2d ◆

4 - Giới hạn của hàm biến phức

4.1- Định nghĩa

Cho hàm phức $w = f(z)$ xác định và đơn trị trong lân cận điểm z_o (có thể trừ z_o). Số phức L gọi là giới hạn của hàm f(z) khi z dần đến z_o nếu: $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, $\exists\delta$ > 0 sao cho $\forall z \in$ lân cận z_o thỏa $0 < |z - z_o| < \delta$ thì $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$

4.2- Định lý

Cho hàm biến phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = \alpha + i\beta$ thì ta có:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \alpha \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \beta \end{cases} \qquad (2.2)$$

∗ **Nhận xét**

Việc tính giới hạn của hàm phức được chuyển thành việc tính giới hạn hai hàm thực hai biến. Các tính chất giới hạn hàm phức tương tự như hàm thực.

Ví dụ 2.5 Chứng minh $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_o^2$

Ta có $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (x^2 + y^2) = x_o^2 + y_o^2, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (2xy) = 2x_o y_o$$

Suy ra $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = x_o^2 - y_o^2 + i2x_o y_o = z_o^2$ ◆

4.3-Định lý

a) Nếu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$ thì

(i) $\lim\limits_{z \to z_0} \left(f(z) \pm g(z)\right) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = A \pm B$

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z).g(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z).\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = A.B$

(iii) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{A}{B}$; nếu $B \neq 0$.

b) Giới hạn của hàm số nếu có thì duy nhất.

5 - Hàm số liên tục

5.1- Định nghĩa

Giả sử hàm $w = f(z)$ xác định và đơn trị trong lân cận điểm z_0. Hàm $f(z)$ gọi là liên tục tại z_0 nếu và chỉ nếu $f(z)$ xác định tại z_0 và $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Hàm f(z) gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm z thuộc D.

5.2- Định lý

Giả sử $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Hàm f(z) liên tục tại $z_0 = x_0 + iy_0$ khi và chỉ khi các hàm u(x,y) và v(x,y) liên tục tại (x_0,y_0).

* **Nhận xét** Việc xét tính liên tục của hàm phức được chuyển thành việc xét tính liên tục của hai hàm thực hai biến.

Ví dụ 2.6 Xét tính liên tục của hàm $f(z) = \dfrac{z + z\bar{z}}{|z|^2}$.

Giải

Ta có $f(z) = \dfrac{z + z\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{x + iy + x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{x + x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Mà các hàm $u(x,y) = \dfrac{x + x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ liên tục trên toàn mặt phẳng trừ điểm (0,0). Suy ra $f(z)$ liên tục trên toàn mặt phẳng trừ điểm z = 0. ◆

Từ nhận xét trên cùng với các tính chất liên tục của hàm hai biến ta suy ra được các định lý sau.

5.3- Định lý

Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm liên tục cũng là hàm liên tục, với điều kiện mẫu số khác không. Hàm hợp của hai hàm liên tục thì liên tục.

5.4- Định lý

Nếu hàm $w = f(z)$ liên tục trong miền kín bị chặn $\overline{D}$ thì $f(z)$ bị chặn trên miền đó. Nghĩa là $\exists M > 0$ sao cho $|f(z)| < M, \forall z \in \overline{D}$.

5.5- Định lý

Nếu hàm $w = f(z)$ liên tục trong miền kín bị chặn $\overline{D}$ thì nó đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (về modun) trên miền đó.

6- Các hàm số sơ cấp cơ bản

6.1 Hàm đa thức

$$w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = P(z) \qquad (2.3)$$

với $a_n \neq 0$; a_0, a_1, ..., a_n là các hằng số phức, n là số nguyên dương được gọi là bậc đa thức P(z). Hàm này đơn trị và liên tục trên toàn mặt phẳng phức.

6.2 Hàm phân thức đại số

$$w := \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad (2.4)$$

với P(z), Q(z) là các đa thức. Hàm này đơn trị và liên tục khắp nơi trừ các điểm z_o mà $Q(z_0) = 0$.

6.3-Hàm mũ

♦ $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ (2.5)

Hàm này đơn trị và liên tục trên toàn mặt phẳng phức.

$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i}$ $e^z(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) = e^z$, $k \in \mathbb{Z}$.

♦ $1 \neq a \in R^+$: $a^z := e^{z\ln a}$ (2.6)

<u>**Ví dụ 2 .7**</u> $2^z = e^{z\ln 2}$; $2^{3+i} = e^{(3+i)\ln 2} = e^{3\ln 2} e^{i\ln 2} = e^{3\ln 2}[\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)]$. ◆

6.4 -Các hàm lượng giác

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (2.7)$$

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} \quad ; \quad \cot gz = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (2.8)$$

Một số tính chất

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ $\quad$ $1 + tg^2 z = \dfrac{1}{\cos^2 z}$ $\quad$ $1 + cotg^2 z = \dfrac{1}{\sin^2 z}$

$\sin(-z) = -\sin z$ $\quad$ $\cos(-z) = \cos z$ $\quad$ $tg(-z) = -tgz$

$cotg(-z) = -cotgz$ $\quad$ $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$.

$tg(z_1 \pm z_2) = \dfrac{tgz_1 \pm tgz_2}{1 \mp tgz_1.tgz_2}$ $\quad$ $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1.\cos z_2 \mp \sin z_1.\sin z_2$

Với $t \in R$, $\cos(it) = \dfrac{e^{-t} + e^t}{2} \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$; $\sin(it) = \dfrac{e^{-t} - e^t}{2} \xrightarrow{t \to -\infty} +\infty$. ■

* <u>**Nhận xét**</u> Các hàm sinz, cosz không bị chặn trên $\mathbb{C}$.

6.5-Các hàm Hyperbolic

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad ; \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad (2.9)$$

$$thz = \frac{shz}{chz} \quad ; \quad \coth z = \frac{chz}{shz} \qquad (2.10)$$

6.6 Các hàm logarit

- Nếu $z = e^w$ thì ta viết w = lnz, gọi là logarit tự nhiên của z.

  $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + k2\pi)}$, k = 0, ± 1, ± 2, ...

  $w = \ln z = \ln r + i(\varphi + k2\pi)$; k = 0, ± 1, ± 2,.... (2.11)

Vậy w = lnz là hàm đa trị. Với mỗi số nguyên k cố định , ta sẽ xác định được một nhánh của hàm, lúc đó hàm trở thành đơn trị. Nhánh chính của hàm lnz , ký hiệu là Lnz, xác định bởi: $\mathrm{Ln}z = \ln r + i\varphi$ với $0 \le \varphi < 2\pi$ (hoặc có thể lấy $-\pi < \varphi \le \pi$).

Hàm lnz là hàm ngược của hàm e^z .

- Nếu $z = a^w$ thì $w = \log_a z$, $0 < a \neq 1$: $\boxed{W = \log_a z = \dfrac{\ln z}{\ln a}}$ (2.12)

6.7-Các hàm lượng giác ngược

Các hàm ngược của các hàm sinz, cosz, tgz, cotgz lần lượt là arcsinz, arccosz, arctgz, arccotgz ; và xác định như sau:

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad arctgz = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \qquad (2.13)$$

$$\arccos z = \frac{1}{i}\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad arc\cot gz = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z + i}{z - i}\right) \qquad (2.14)$$

6.8 -Các hàm Hyperbolic ngược

Các hàm ngược của các hàm shz, chz, thz, cothz lần lượt là $\mathrm{sh}^{-1}z$, $\mathrm{ch}^{-1}z$, $\mathrm{th}^{-1}z$, $\coth^{-1} z$; và xác định như sau:

$$sh^{-1}z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \qquad th^{-1}z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \qquad (2.15)$$

$$ch^{-1}z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right) \qquad (2.16)$$

6.9 - Hàm lũy thừa

z^α, $\alpha \in \mathbb{C}$ được định nghĩa bởi

$$z^\alpha := e^{\alpha \ln z} \qquad (2.17)$$

Tương tự hàm $(f(z))^{g(z)} = e^{g(z)\ln f(z)}$. (2.18)

∗ Tất cả các hàm số có được từ các hàm số sơ cấp cơ bản kể trên bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, phép khai căn, phép hợp hai hàm số , gọi là ***hàm số sơ cấp***.

BÀI TẬP

Bài 2.1 Tìm phần thực và phần ảo của hàm f(z) trong các trường hợp sau:

a) $f(z) = z^3 + 2iz$ b) $f(z) = z^3 - 2z^2 + 8i\bar{z}$ c) $f(z) = \dfrac{z}{z+3}$ d) $f(z) = \dfrac{\bar{z} - i}{z+3}$

d) $f(z) = \dfrac{\bar{z} - 2i}{z+3i}$ e) $f(z) = e^{1-iz}$ f) $f(z) = z\,e^{1-iz}$ g) $f(z) = ze^{3iz}$

Bài 2.2 Viết mỗi hàm số sau đây thành đa thức theo z = x + iy.

a) $f(z) = (x^2 - y^2 - 2y + 1) + 2i(xy + x)$ b) $f(z) = (-x^2 + y^2 - y + 2) + i(x - 2xy)$

Bài 2.3 Xét tính liên tục các hàm số sau:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ b) $f(z) = (x + y^2) + ixy$ c) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 3iz - 2}{z+i} & \text{khi } z \neq -i \\ i & \text{khi } z = -i \end{cases}$

Bài 2.4 Các hàm $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$, $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$, $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ xác định với $z \neq 0$. Phải xác định thêm giá trị $f(z)$ tại z = 0 thế nào để hàm liên tục tại điểm này?

Bài 2.5 Giải các phương trình sau đây:

a) $\sin z = 7$	e) $\ln z = 2 + i = 0$	i) $chz = 0$
b) $\sin^2 z - 12\sin z + 35 = 0$	f) $z^4 - z^2 - 2z + 2 = 0$	j) $chz = -6$
c) $\cos^3 z - 3\cos z + 2 = 0$	g) $e^z = 0$	k) $shz = -2$
d) $\cos^2 z - 9\cos z + 20 = 0$	h) $e^z = -2$	l) $shz = i$

Bài 2.6 Cho phép biến hình $\omega = f(z) = z^2$. Tìm:

a) Ảnh của đường y = 2 b) Ảnh của đường y = x c) Tia $\arg z = \alpha$

Bài 2.7 Cho phép biến hình $\omega = f(z) = \dfrac{1}{z}$, tìm :

a) Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ b) Ảnh của đường y = x

c) Ảnh của họ đường tròn $x^2 + y^2 = ax$

Bài 2.8 Cho phép biến hình $\omega = f(z) = z^4$. Tìm:

a) Ảnh của đường $|z| = r$. b) Ảnh của đường y = x

c) Tia $\arg z = \alpha$ d) Miền hình quạt $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$

Bài 2.9

a) Tìm ảnh của đường thẳng $x = 2\pi$ qua phép biến hình $f(z) = e^z$.

b) Tìm ảnh của đường thẳng x = a qua phép biến hình $f(z) = e^z$.

c) Tìm ảnh của đường thẳng $y = \pi$ qua phép biến hình $f(z) = e^z$.

d) Tìm ảnh của đường thẳng y = b qua phép biến hình f(z) = e^z.

Bài 2.10

a) Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của phương trình sinz = 0 đều là số thực và tìm các nghiệm này.

b) Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của phương trình cosz = 0 đều là số thực và tìm các nghiệm này.

Bài 2.11 Viết các số phức sau đây dưới dạng đại số.

a) $\ln(-12)$	d) 2^i	g) ch(1-i)	j) $(1-i)^{2+i}$
b) $\ln(1+i\sqrt{3})$	e) i^i	h) $sh(3-2i)$	k) arctg(1+i)
c) $\ln(1-i\sqrt{3})$	f) sin(1+i)	i) tani	l) arcsin(-i)

Bài 2.12

a) Tìm ảnh của đường thẳng $y = -\dfrac{\pi}{2}$ qua phép biến hình w = $e^{\overline{z}}$

b) Tìm ảnh của đường thẳng $y = \dfrac{\pi}{2}$ qua phép biến hình w = $e^{1+\overline{z}}$

c) Tìm ảnh của đường thẳng x = 2 qua phép biến hình w = $e^{1+\overline{z}}$

d) Tìm ảnh của đường thẳng $y = \dfrac{\pi}{8}$ qua phép biến hình w = e^{-4z}

e) Tìm ảnh của đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{8}$ qua phép biến hình w = e^{-4z}

Chương 3

ĐẠO HÀM CỦA HÀM BIẾN PHỨC

Trong chương này, bạn sẽ học:

- Khái niệm đạo hàm và vi phân hàm biến phức.
- Ý nghĩa hình học của đạo hàm.
- Điều kiện Cauchy-Riemann. Công thức tính đạo hàm.
- Khái niệm hàm giải tích.
- Khái niệm hàm điều hòa.
- Liên hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hòa.
- Cách tìm hàm giải tích khi biết phần thực hoặc phần ảo của nó.

1.Định nghĩa đạo hàm và vi phân

Cho hàm $w = f(z)$ xác định và đơn trị trong miền D và điểm $z \in D$.

i) Nếu $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ tồn tại hữu hạn thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm $f(z)$ tại z, ký hiệu f'(z).

$$\boxed{f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}} \qquad (3.1)$$

ii) Hàm số $w = f(z)$ gọi là có đạo hàm trên miền D nếu $f(z)$ có đạo hàm tại mọi $z \in D$.

iii) Hàm $w = f(z)$ gọi là khả vi tại z nếu số gia $\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z)$ có thể viết dưới dạng

$$\Delta f(z) = A\Delta z + o(\Delta z)$$

Trong đó A là hằng số phức chỉ phụ thuộc vào f và z, $o(\Delta z)$ là vô cùng bé cấp cao hơn Δz khi $\Delta z \to 0$. Khi đó $A\Delta z$ gọi là vi phân hàm số tại z, ký hiệu $df(z)$ hay dw.

iv) Hàm số $w = f(z)$ gọi là khả vi trên miền D nếu $f(z)$ khả vi tại mọi $z \in D$.

Tương tự như hàm một biến thực, ta có: Hàm $w = f(z)$ ***khả vi tại z*** nếu và chỉ nếu $f(z)$ ***có đạo hàm tại z***. Khi đó, A = f'(z) và ta có công thức tính vi phân

$$df(z) = f'(z)\Delta z = f'(z)dz = w'dz = dw \qquad (3.2)$$

✻ *Nhận xét* : Khái niệm đạo hàm, khả vi và vi phân hàm phức hoàn toàn tương tự hàm thực một biến.

Ví dụ 3.1 Tính đạo hàm và vi phân hàm số $w = f(z) = z^3$.

Giải

Đạo hàm $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z+\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} [3z^2 + 3z\Delta z + (\Delta z)^2] = 3z^2.$$

Vi phân $dw = df(z) = 3z^2dz$. ◆

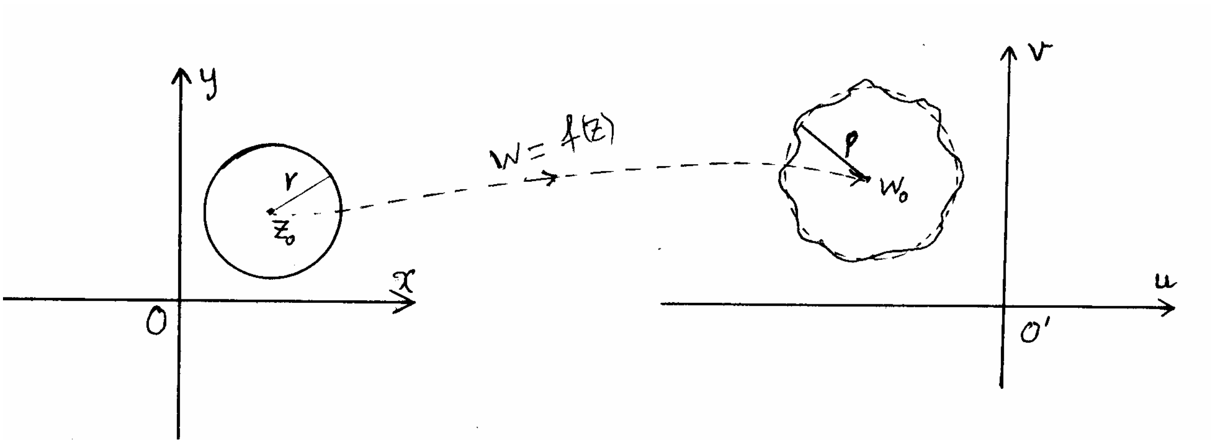
2 . Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm $w = f(z)$ khả vi tại z_0 và $f'(z_0) \neq 0$.

✻ Ý nghĩa của $|f'(z_0)|$:

Đặt $k = |f'(z_0)|$, $r = |\Delta z| = |z - z_0|$. Khi $\Delta z \to 0$, ta có

$$\rho = |\Delta w| = |f'(z)\Delta z + o(\Delta z)| \approx |f'(z)\Delta z| = |f'(z)||\Delta z| = kr \Rightarrow \rho \approx kr .$$

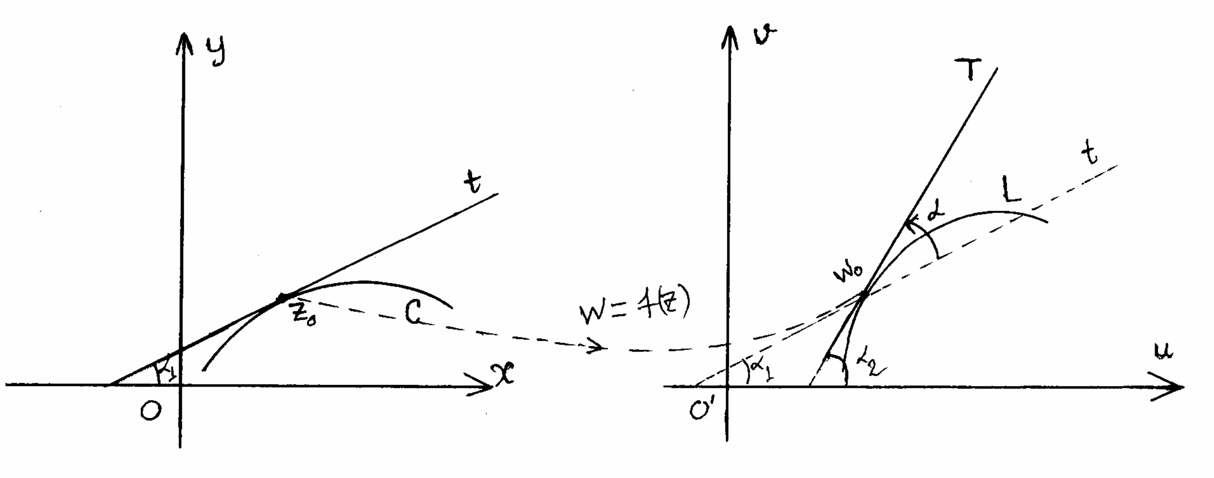


Ảnh của hình tròn $|z - z_0| < r$ là hình "gần tròn" bán kính ρ.

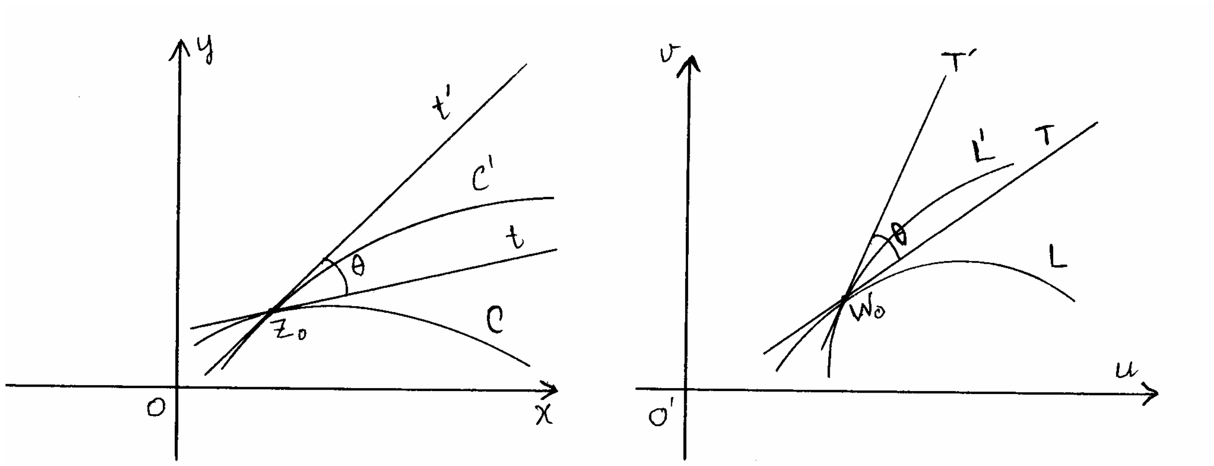
Vậy $k = |f'(z_0)|$ là hệ số co dãn của phép biến hình $w = f(z)$ tại z_0.

✻ Ý nghĩa của arg(f'(z₀)):

$\arg(f'(z_0))$ là góc quay của phép biến hình $w = f(z)$ tại z_0. Tức là nếu gọi C là đường cong đi qua z_o với tiếp tuyến tương ứng là z_ot và $L = f(C)$ với tiếp tuyến tương ứng tại w_o là w_oT thì $\alpha = \arg(f'(z_0))$ là góc mà ta phải quay tiếp tuyến z_ot để được tiếp tuyến w_oT. Góc này không phụ thuộc vào việc chọn đường cong C qua z_o.



Bây giờ nếu C và C’ là hai đường cong cắt nhau tại z_0 một góc là θ thì ảnh tương ứng của chúng là L và L’ cũng cắt nhau tại w_0 một góc θ. Vì vậy ta nói w = f(z) là phép biến hình bảo giác tại z_0.



3. Điều kiện Cauchy - Riemann (C - R)

<u>Điều kiện cần</u>

Nếu hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ khả vi tại đểm z = x + iy thì các hàm u(x,y) và v(x,y) khả vi tại điểm (x,y) và thỏa điều kiện Cauchy - Riemann.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{(C-R)} \qquad (3.3)$$

<u>Điều kiện đủ</u>

Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) khả vi tại điểm (x,y) và thỏa mãn điều kiện (C- R) thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại z = x + iy.

Chứng minh

* **<u>Điều kiện cần</u>** Giả sử f(z) khả vi tại z, ta có:

$$\Delta f(z) = f'(z) + o(\Delta z)\ ,\ \ \Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v \qquad (1)$$

Đặt $f'(z) = B + iC$ với $B, C \in \mathbb{R}$; $o(\Delta z) = o_1(\Delta z) + i\, o_2(\Delta z)$ với $o_1(\Delta z)$, $o_2(\Delta z)$ là các vô cùng bé thực cấp cao hơn Δz khi $\Delta z \to 0$. Thay tất cả vào (1) ta có :

$$\Delta u + i\Delta v = (B + iC)\,\Delta z + o(\Delta z) = (B + iC)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(\Delta z) + i\, o_2(\Delta z)$$

$$= [B\Delta x - C\Delta y + o_1(\Delta z)] + i[\,C\,\Delta x + B\Delta y + o_2(\Delta z)\,] \qquad (2)$$

Suy ra $\Delta u = B\Delta x - C\Delta y + o_1(\Delta z)$ và $\Delta v = C\,\Delta x + B\Delta y + o_2(\Delta z)$ (3)

Do đó u, v khả vi tại (x,y) và theo công thức vi phân hàm thực hai biến ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = B = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{và} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = C = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

∗ **Điều kiện đủ** Giả sử các hàm u, v khả vi và thỏa điều kiện (C-R) . Khi đó ta có (3) và do đó có (2) và (1). Tức là f(z) khả vi tại z. ■

∗***Hệ quả*** *(Công thức tính đạo hàm)*

Từ chứng minh trên ta suy ra công thức tính đạo hàm của hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại z = x + iy như sau

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad (3.4)$$

∗*Chú ý* (Nhắc lại điều kiện đủ khả vi của hàm hai biến thực)

Nếu hàm hai biến thực $g(x,y)$ *có các đạo hàm riêng* g'_x, g'_y *trên tập mở* D và g'_x, g'_y *liên tục trên* D thì $g(x,y)$ *khả vi trên* D.

Ví dụ 3.2

a) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z) = (z - 6i)\operatorname{Re} z - iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

b) Chứng minh hàm $f(z) = e^z$ khả vi trên toàn mặt phẳng và $(e^z)' = e^z$.

Giải

a) Tập xác định hàm số là $\mathbb{C}$.

$$f(z) = (z - 6i)\operatorname{Re} z - iz = (x + iy - 6i)x - i(x + iy) = \underbrace{(x^2 + y)}_{u} + i\underbrace{(xy - 7x)}_{v}$$

Các đạo hàm riêng $u'_x = 2x, u'_y = 1$, $v'_x = y - 7, v'_y = x$ đều liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên u, v khả vi trên $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (1).

Điều kiện (C-R): $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \\ 1 = 7 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$ (2).

Hàm số có đạo hàm khi và chỉ khi hàm số khả vi (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra tập tất cả các điểm hàm số có đạo hàm là $\{6i\}$.

$f'(6i) = u'_x(0,6) + iv'_x(0,6) = 2\times 0 + i(6-7) = -i$

b) Tập xác định hàm số là $\mathbb{C}$.

Ta có $z = x + iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y$

$\Rightarrow u = e^x\cos y,\ v = e^x\sin y.$

Các hàm u, v có các đạo hàm riêng tại $\forall(x,y)$ và ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y \end{cases},\ \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y \end{cases}$$

đều liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên u, v khả vi trên $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Rõ ràng u, v thỏa điều kiện Cauchy-Riemann.

Vậy $f(z) = e^z$ khả vi tại mọi z và $f'(z) = e^x\cos y + i\,e^x\sin y = e^z$.

★ **Nhận xét :** Cho hàm w = $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ và các hàm u(x, y) , v(x, y) có các đạo hàm riêng tại điểm (x,y). Với z = x+iy , $\bar{z}$ = x-iy thì x = $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, y = $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ và w xem như hàm số theo hai biến z , $\bar{z}$. Áp dụng qui tắc đạo hàm hàm hợp của hàm hai biến ta được

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{-1}{2i}\right)\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{-1}{2i}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Vậy điều kiện (C-R) tương đương với $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$. ■

<u>**Ví dụ 3.3**</u> w = 2x-4yi = $2\dfrac{z+\bar{z}}{2} - 4i\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ = -z +3$\bar{z} \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 3 \neq 0$ nên hàm này không khả vi tại bất kỳ điểm nào. ◆

✻Chú ý

Các tính chất đạo hàm và vi phân; các qui tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu , tích, thương, hàm hợp và bảng các công thức đạo hàm cơ bản của hàm thực vẫn đúng đối với hàm phức (đối với các hàm đa trị phải chọn nhánh thích hợp).

4. Hàm giải tích

- Hàm đơn trị $w = f(z)$ gọi là giải tích trong miền D nếu $f(z)$ khả vi tại mọi điểm thuộc miền D.

- Hàm $w = f(z)$ được gọi là giải tích tại điểm z nếu có một lân cận nào đó của z sao cho $f(z)$ khả vi trong lân cận đó.

Ví dụ 3.4

a) Hàm $f(z) = e^z$ khả vi tại mọi z thuộc mặt phẳng phức, do đó nó giải tích trên toàn mặt phẳng.

b) Hàm $f(z) = (z-6i)\operatorname{Re} z - iz$ chỉ khả vi tại $z = 6i$ nên $f(z)$ không giải tích tại bất kỳ điểm nào cả.

c) Hàm $f(z) = z\operatorname{Im} z = (x+iy)y = xy + iy^2 \Rightarrow u = xy$, $v = y^2$

$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y \end{cases}$ đều liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên u, v khả vi trên $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Xét điều kiện Cauchy-Riemann: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2y \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Vậy hàm số chỉ khả vi tại z = 0, do đó nó không giải tích tại bất kỳ điểm nào trong mặt phẳng. ◆

* *Nhận xét* : Trong một miền thì khái niệm khả vi và giải tích tương đương nhau. Nhưng tại một điểm thì khái niệm giải tích đòi hỏi điều kiện nhiều hơn khả vi.

5. Liên hệ hàm giải tích và hàm điều hòa

5.1. Hàm điều hòa

Hàm $u(x, y)$ gọi là hàm điều hòa trong miền D nếu nó thỏa phương trình Laplace:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \forall (x, y) \in D \qquad (3.5)$$

$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - gọi là toán tử Laplace

Ví dụ 3.5 Chứng minh hàm $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ là hàm điều hòa trên $R^2\backslash\{0\}$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Vậy $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ là hàm điều hòa trên $R^2\backslash\{0\}$. ◆

5.2. Định lý

Hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích trong miền D nếu và chỉ nếu phần thực $u(x,y)$ và phần ảo $v(x,y)$ là các hàm điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy-Riemann trong D.

5.3- Định nghĩa

Hai hàm điều hòa u,v sao cho $f(z) = u + iv$ là hàm giải tích gọi là hai hàm điều hòa liên hợp; v gọi là liên hợp điều hòa với u.

Ví dụ 3.6 Tìm hàm giải tích $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biết phần thực:

$$u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$$

Giải

◆ Kiểm tra u là hàm điều hòa:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 - 4y + 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y + 4 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y - 4 \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Vậy u là hàm điều hòa trên $\mathbb{R}^2$.

◆ Tìm v: Theo điều kiện Cauchy-Riemann ta có

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + 4y - 3x^2 \Rightarrow v = \int (3y^2 + 4y - 3x^2)dx + g(y) = 3y^2x + 4yx - x^3 + g(y).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + 4x + g'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

Suy ra $v = 3y^2x + 4yx - x^3 + C$.

Vậy $f(z) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i(3y^2x + 4yx - x^3 + C)$, với C là hằng số thực bất kỳ. ◆

Ví dụ 3.7 Tìm hàm giải tích $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biết phần thực:

$$u = x^2 - y^2 + e^y$$

Giải

♦ Kiểm tra u là hàm điều hòa:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y + e^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + e^y \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \neq 0, \forall (x,y) \in R^2$$

$\Rightarrow$ u không là hàm điều hòa.

Vậy không có hàm giải tích $f(z)$ thỏa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. ◆

BÀI TẬP

Bài 3.1 Tìm các hằng số thực a,b,c để hàm $f(z)$ giải tích.

a) $f(z)$= x + ay + i(bx + cy) **b)** $f(z)$= cosx(chy + ashy) + isinx(chy + bshy)

Bài 3.2 Chứng minh rằng :

a)Hàm $f(z) = \sqrt{|xy|}$ thỏa điều kiện Cauchy-Riemann tại z = 0 nhưng không khả vi *tại* $z = 0$.

b) Hàm $f(z)$= zRez khả vi tại z = 0, tính f'(0).

c) Hàm $f(z) = \bar{z}$ không khả vi ở điểm nào cả.

Bài 3.3 Cho hàm $f(z) = z^2 + 2z$.

a) Tìm hệ số co dãn và góc quay của phép biến hình tại z = -1 + i

b) Trong miền nào của mặt phẳng z , phép biến hình là phép co , phép dãn ?

Bài 3.4 Làm tương tự như bài 3 với các hàm f(z) sau:

a) $f(z) = z^2$ b) $f(z) = e^z$ c) f(z) = ln(z-1) d) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

Bài 3.5 Trong môn khí động lực học và cơ học chất lỏng , các hàm u và v trong $f(z) = u + iv$, ở đây f(z) giải tích , gọi là hàm thế vị vận tốc và hàm dòng. Nếu $u = x^2 + 4x - y^2 + 2y$, hãy tìm v và f(z).

Bài 3.6 Tìm hàm giải tích $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biết phần ảo:

$v = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + 3$, f(0) = 1+3i

Bài 3.7 Tìm hàm giải tích $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biết :

$u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$, $f(0) = 0 + 2i$.

Bài 3.8 Tìm hàm giải tích $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biết :

a) v = 2x(1-y) b) $u = e^{-x}(x\cos y + y\sin y)$ và f(0) = 1

c) $v = x^2 - 2y$

d) $f'(z) = 4z - 3$ và $f(1+i) = -3i$

e) $u = e^{y/x}$

f) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$. Tính $f'(z)$.

<u>Bài 3.9</u> Giả sử $z = re^{i\varphi}$ và $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$. Chứng minh rằng điều kiện (C-R) trong tọa độ cực của f(z) có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases} \quad \text{và } f'(z) = e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

<u>Bài 3.10</u> Xét tính giải tích của các hàm số sau đây :

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = z.\bar{z}$

c) $f(z) = z.\text{Im}z$

d) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z^2 + z\bar{z}\right)$

e) $f(z) = 2z + \dfrac{i}{4}\left(z + \bar{z}\right)2 + \dfrac{1}{4}\left(z - \bar{z}\right)2$

<u>Bài 3.11</u> Cho hàm số $f(z) = \dfrac{1}{4}(1-i)\left(z^2 + \overline{z^2}\right) + \dfrac{1}{2}(1+i)z.\bar{z} + iz$

a) Tìm quĩ tích những điểm z trong mặt phẳng phức mà tại đó f(z) có đạo hàm.

b) Tính các đạo hàm $f'(1+i)$; $f'(1-i)$.

c) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức mà f(z) giải tích.

<u>Bài 3.12</u> Cho hàm $f(z) = xy^2 + ix^2y$.

a) Tìm tập hợp các điểm mà f(z) thỏa điều kiện Cauchy-Riemann .

b) Tìm tập hợp các điểm mà f(z) khả vi.

c) Tìm tập hợp các điểm mà f(z) giải tích.

<u>Bài 3.13</u>

a) Tìm tập hợp các điểm z trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm $f(z) = z^2 + iz\bar{z} - i\bar{z}$ có đạo hàm. Tính đạo hàm $f'(i)$, $f'(1)$.

b) Tìm hàm giải tích $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biết $u = e^y + y^2 - x^2 + 2xy$

<u>Bài 3.14</u> Chứng minh rằng hàm $f(z) = \text{Re}z = x$ không có đạo hàm ở bất kỳ điểm nào của mặt phẳng phức.

<u>Bài 3.15</u> Cho D là một miền. Chứng minh rằng nếu hàm hai biến f(x,y) thỏa $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\forall (x,y) \in D$ thì thì f(x,y) là hằng số trên miền D.

Kết quả bài 3.15 được áp dụng vào các bài 1.16, 3.17, 3.18.

<u>Bài 3.16</u> Chứng minh rằng nếu hàm f(z) giải tích và thực trong miền D thì f(z) là hằng số trong D .

<u>Bài 3.17</u> Chứng minh rằng nếu f(z) giải tích trong miền D và f'(z) = 0 , $\forall z \in$ D thì f(z) là hằng số trong D.

<u>Bài 3.18</u> Chứng minh rằng nếu f(z) và $\overline{f(z)}$ cùng giải tích trên miền D thì f(z) là hằng số trên D.

<u>Bài 3.19</u> Giả sử hàm giải tích w = $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ biến miền D trong mặt phẳng z thành miền D' trong mặt phẳng W. Gọi S là diện tích miền D'. Trong tích phân kép ta đã biết : $\mathbf{S} = \iint\limits_{D'} dudv = \iint\limits_{D} |J| dxdy$ với $\mathbf{J} = \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$

Chứng minh rằng : $\mathbf{S} = \iint\limits_{D} |f'(z)|^2 dxdy$

<u>Bài 3.20</u> Chứng minh qui tắc L'Hospital cho hàm giải tích:

Nếu f(z) và g(z) là các hàm giải tích trong miền chứa điểm z_o , $f(z_o) = g(z_o) = 0$ và $g'(z_o) \neq 0$ thì : $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_o)}{g'(z_o)}$.

<u>Bài 3.21</u> Cho u , v là hai hàm điều hòa liên hợp trong miền D.

a) Chứng minh rằng các cặp (v, -u), (-v, u) cũng là các cặp hàm điều hòa liên hợp trong miền D.

b) Cặp (v, u) có là cặp hàm điều hòa liên hợp trong miền D không?

<u>Bài 3.22</u> Cho hàm phức $f(z) = (\overline{z} - 32 - 2i)\operatorname{Re} z$

a) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức mà hàm số có đạo hàm.

b) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức mà hàm số giải tích.

<u>Bài 3.23</u> Cho hàm phức $f(z) = (6 + +2i.\overline{z} - 3i)\operatorname{Im} z$

a) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức mà hàm số có đạo hàm.

b) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức mà hàm số giải tích.

<u>Bài 3.24</u>

a) Tìm hàm giải tích $f(z) = u + iv$ biết phần thực $u = 12xy + 6x + 3$, f(0) = 3+2i

b) Tìm hàm giải tích $f(z) = u + iv$ biết phần ảo $v = 4xy + 8x + 1$, f(0) = 6 +i

<u>Bài 3.25</u> Chứng minh rằng $u = x^2 - y^2 - 2x$, $v = 2xy - 2y$ là các hàm điều hòa liên hợp của nhau.

<u>Bài 3.26</u> Ứng với mỗi hàm số sau đây, tính đạo hàm của hàm số tại các điểm mà hàm số có đạo hàm và chỉ ra tập các điểm mà hàm số giải tích.

a) $f(z) = 2^{(3+i)z} - z^5$ b) $f(z) = \dfrac{2iz - 3}{z^2 + 4}$ c) $f(z) = (z^2 + 3i)e^{-5iz}$ d) $f(z) = ch(3iz) + 2i\sin^3(7iz)$

Chương 4

TÍCH PHÂN HÀM BIẾN PHỨC

Trong chương này, bạn sẽ học

- Khái niệm tích phân đường của hàm biến phức.
- Tích phân Cauchy cho miền đơn liên, đa liên.
- Nguyên hàm và tích phân bất định.
- Công thức Newton-Leibnitz.
- Đạo hàm cấp cao của hàm giải tích, công thức tích phân Cauchy.
- Bất đẳng thức Cauchy.

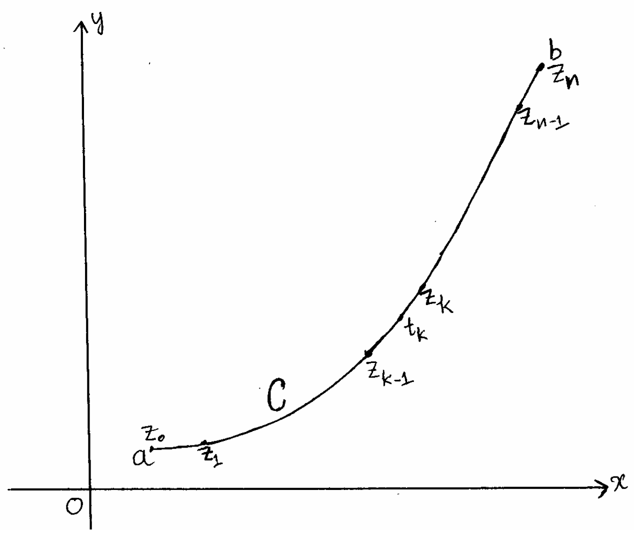
....

1. Tích phân đường của hàm biến phức

1.1. Định nghĩa

Cho hàm phức $f(z)$ xác định trên đường cong C có điểm đầu là a, điểm cuối là b. Chia tùy ý đường cong C thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau bởi các điểm chia a = $z_0, z_1, \ldots, z_n$ = b. Trên mỗi cung nối hai điểm z_{k-1} và z_k, ta lấy tùy ý một điểm t_k và lập tổng tích phân:

$$f(t_1)\Delta z_1 + f(t_2)\Delta z_2 + \ldots + f(t_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta z_k, \text{ với } \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$



Hình 4.1

Nếu khi $\max|\Delta z_k| \to 0$ mà tổng $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta z_k$ dần đến một số phức hữu hạn I, không phụ thuộc vào cách chia đường C và cách lấy các điểm trung gian t_k, thì I được gọi là tích phân đường của hàm $f(z)$ dọc theo đường cong C hướng từ a đến b.

Ký hiệu $\int\limits_C f(z)dz$.

$$\int\limits_C f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta z_k \qquad (4.1)$$

Khi đó hàm $f(z)$ gọi là khả tích trên C.

★ **Chú ý**: Ký hiệu $\oint\limits_C f(z)dz$ để chỉ tích phân dọc đường cong kín C (thường lấy theo chiều dương; tức là chiều mà khi đi theo chiều đó, ta luôn nhìn thấy miền bao bởi C gần ta nhất ở về phía bên trái).

1.2. Điều kiện tồn tại

- Đường cong C có phương trình tham số là x = x(t), y = y(t) ,với $\alpha \xrightarrow{t} \beta$, được gọi là trơn nếu tại mọi điểm thuộc khoảng đó các đạo hàm x'(t) và y'(t) tồn tại và không đồng thời bằng không. Nói cách khác, đường cong C gọi là trơn nếu nó có tiếp tuyến biến thiên liên tục.
- Đường cong C gọi là đường trơn từng khúc nếu nó có thể chia ra thành hữu hạn cung trơn. Vậy mọi đường cong trơn thì trơn từng khúc.

∗ *Định lý về điều kiện tồn tại*

Nếu C là đường cong trơn hoặc trơn từng khúc và $f(z)$ liên tục trên C thì tồn tại tích phân $\int\limits_C f(z)dz$.

1.3.Các tính chất

Cho a, b là các hằng số phức

(i) $\int\limits_C [\ af(z) + bg(z)\ ]dz = a\int\limits_C f(z)dz + b\int\limits_C g(z)dz$

(ii) Nếu đường cong C được chia thành hai phần C_1 , C_2 không dẫm lên nhau thì
$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz$

(iii) Nếu đổi chiều đường lấy tích phân thì tích phân đường đổi dấu. Tức là :
$\int\limits_C f(z)dz = -\int\limits_{C^{-1}} f(z)dz$; trong đó C^{-1} ngược chiều với C.

(iv) $\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \le \left|\int\limits_C |f(z)|dz\right| \le ML$

trong đó $M = \max\{\,|f(z)|: z \in C\}$ và L là độ dài đường cong C.

Trong các tính chất trên, ta giả thiết rằng các hàm số dưới dấu tích phân khả tích trên đường lấy tích phân tương ứng.

1.4. Cách tính

- Với $z = x+iy$, $dz = dx + idy$, $f(z) = u + iv = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \qquad (4.2)}$$

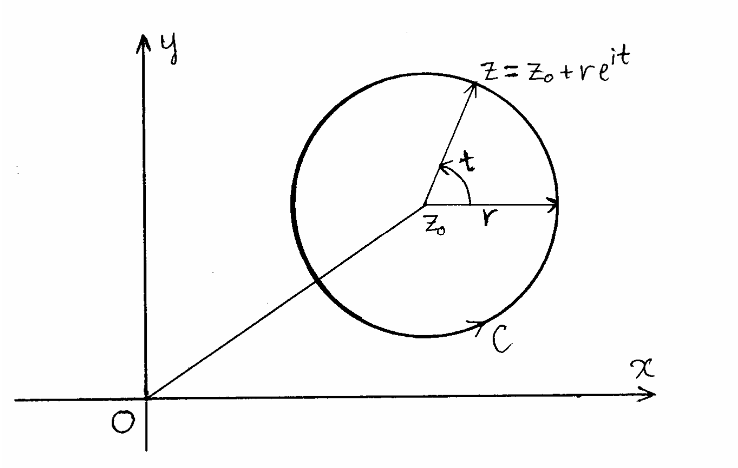
- Nếu $C = \{z \mid z = x + iy = x(t) + iy(t),\ \alpha \xrightarrow{t} \beta\}$ thì

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \qquad (4.3)}$$

Chú ý Xem lại cách tính tích phân đường loại 2.

Ví dụ 4.1 Tính $\mathbf{I}_n = \oint_C \frac{dz}{(z-z_o)^{n+1}}$, với C: $|z-z_o| = r$, n là số nguyên.

Giải



Hình 4.2

Tham số đường cong C : $z = z_o + re^{it}$ với $0 \xrightarrow{t} 2\pi$, $dz = ir\,e^{it}\,dt$

$$\mathbf{I}_n = \oint_C \frac{dz}{(z-z_o)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}dt}{r^{n+1}e^{(n+1)it}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{-nit}}{r^n}dt$$

- $n = 0$: $\mathbf{I}_n = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$

- $n \neq 0$: $\mathbf{I}_n = \left.\frac{e^{-nit}}{-nr^n}\right|_0^{2\pi} = 0$

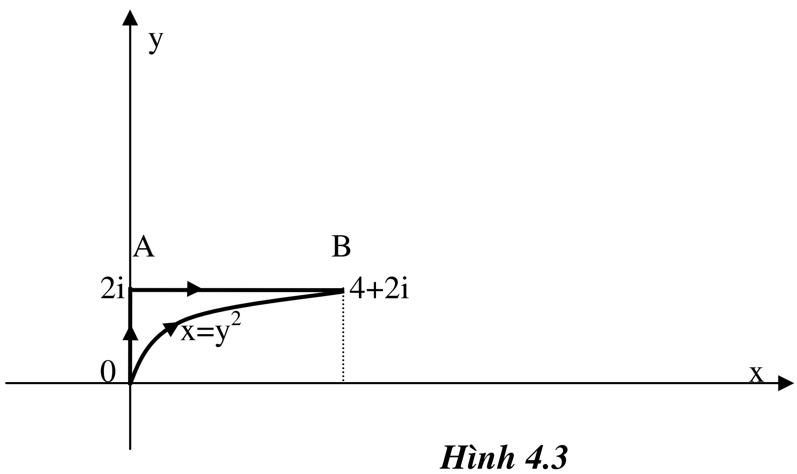
Vậy $\quad \mathbf{I}_n = \oint\limits_C \dfrac{dz}{(z-z_o)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & , \ n = 0 \\ 0 & , \ n \neq 0 \end{cases}$ ◆

<u>Ví dụ 4.2</u> Tính tích phân $\int\limits_C \bar{z}dz$ với là đường nối từ z = 0 đến z = 4+2i trong các trường hợp sau:

a) C là đường $x = y^2$.

b) C là đường gấp khúc từ 0 đến 2i; rồi từ 2i đến 4 +2i.

<u>Giải</u>



Hình 4.3

a) Đặt $y = t \Rightarrow x = t^2$ với $0 \xrightarrow{t} 2$. Suy ra C: $z = t^2 + it$, $0 \xrightarrow{t} 2$, $dz = (2t+i)dt$

$$\int\limits_C \bar{z}dz = \int\limits_0^2 (t^2 - it)(2t+i)dt = \int\limits_0^2 (2t^3 - it^2 + t)dt = 10 - \frac{8i}{3}.$$

b) $\int\limits_C \bar{z}dz = \int\limits_{0A} \bar{z}dz + \int\limits_{AB} \bar{z}dz$

◆ Đoạn 0A : $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \xrightarrow{y} 2 \end{cases}$, $z = 0+iy$, $\bar{z} = -iy$, $dz = idy$

$$\int\limits_{0A} \bar{z}dz = \int\limits_0^2 (-iy)idy = \int\limits_0^2 ydy = 2$$

◆ Đoạn AB : $\begin{cases} y = 2 \\ 0 \xrightarrow{x} 4 \end{cases}$, $z = x + i2$, $\bar{z} = x - i2$, $dz = dx$

$$\int\limits_{AB} \bar{z}dz = \int\limits_0^4 (x - i2)dx = 8 - 8i$$

Vậy $\int\limits_C \bar{z}dz = \int\limits_{0A} \bar{z}dz + \int\limits_{AB} \bar{z}dz = 10 - 8i.$ ◆

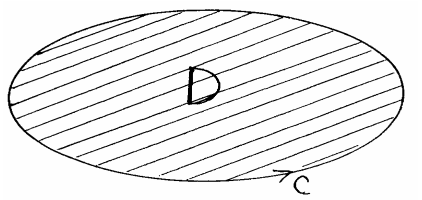
2. Bổ đề Green

Nếu D là miền đơn liên hoặc đa liên bị chặn với biên là đường cong C trơn (hoặc trơn từng khúc) và nếu P(x,y), Q(x,y), $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trên miền kín $\overline{D}$ thì ta có công thức Green

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

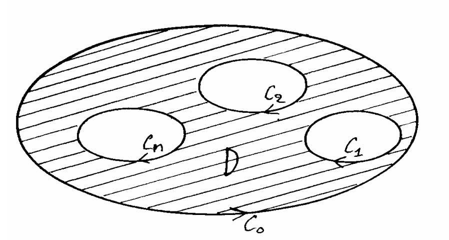
trong đó tích phân đường ở vế trái lấy theo chiều dương của C.

• ***<u>Chú thích</u>*** Chiều dương là chiều mà khi đi dọc C theo chiều đó sẽ thấy miền D kề phía bên trái.



Hình 4.4a

Miền đơn liên bị chặn D với biên là đường cong C.



Hình 4.4b

Miền đa liên bị chặn D với biên là đường cong $C = C_o \cup C_1 \cup .... \cup C_n$.

Bổ đề Green được áp dụng để chứng minh định lý Cauchy sau đây.

3. Định lý 4.1 (định lý Cauchy)

Nếu D là miền đơn liên hoặc đa liên bị chặn với biên là đường cong C trơn (hoặc trơn từng khúc) và nếu $f(z)$ giải tích và $f'(z)$ liên tục bên trong và trên biên của D thì

$$\oint_C f(z)dz = 0 \qquad (4.4)$$

trong đó chiều đi trên C là chiều dương.

<u>Chứng minh</u>

Từ (4.2) , áp dụng bổ đề Green và điều kiện (C-R) ta có

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

■

• **<u>Chú thích</u>**

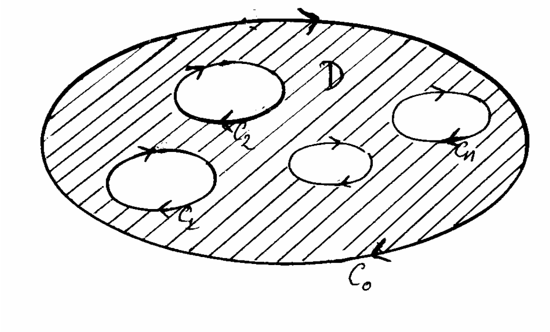
Goursat chứng minh rằng định lý này vẫn đúng mà không cần giả thiết $f'(z)$ liên tục. Vì thế, dạng tổng quát của định lý này còn gọi là định lý Cauchy-Goursat.

*** Hệ quả 1**

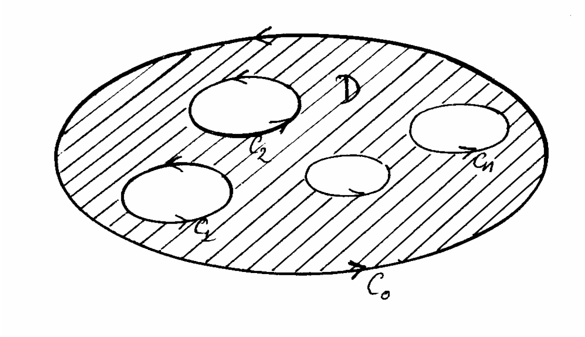
Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền bị chặn $\overline{D}$ có biên bao gồm các đường cong C_0, $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ không thông nhau và C_0 bao $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ thì

$$\boxed{\oint_{C_o} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{C_n} f(z)dz \qquad (4.5)}$$

trong đó chiều đi trên C_0, $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ hoặc ***đồng thời cùng chiều kim đồng hồ***, hoặc ***đồng thời ngược chiều kim đồng hồ***.



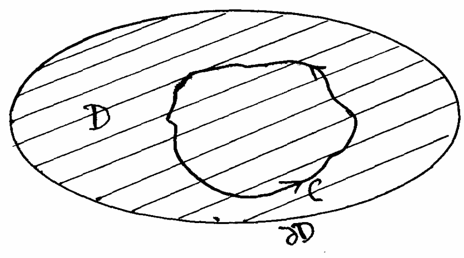
Hình 4.5 a



Hình 4.5b

*** Hệ quả 2**

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và C là đường cong kín trơn từng khúc bất kỳ thuộc D thì $\oint_C f(z)dz = 0$.



Hình 4.6

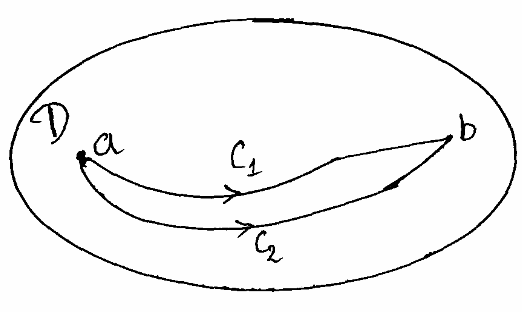
Ví dụ 4.3

a) Hàm $f(z) = e^z$ giải tích trên toàn mặt phẳng nên với C là đường cong kín bất kỳ trong mặt phẳng ta có $\oint_C e^z dz = 0$.

b) Với C là đường cong kín bất kỳ trong mặt phẳng không đi qua và không bao bất kỳ điểm nào trong trong hai điểm $\pm i$ thì $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1} dz = 0$. ◆

*** *Hệ quả 3***

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và C_1, C_2 là hai đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối thì $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.



Hình 4.7

★ **Chú ý** Hệ quả 2 và hệ quả 3 không đúng nếu miền D đa liên.

4. Nguyên hàm và tích phân bất định

4.1. Định lý

Nếu $F(z)$ và $G(z)$ là hai hàm số có đạo hàm trên miền D và $F'(z) = G'(z), \forall z \in D$ thì $G(z) = F(z) + K$, với K là hằng số tùy ý.

Chứng minh

Tá có: $(G(z) - F(z))' = G'(z) - F'(z) = 0, \forall z \in D$

Suy ra $G(z) - F(z) = K$, $\forall z \in D$ (xem bài tập 3.17)

Vậy $G(z) = F(z) + K, \forall z \in D$.

4.2. Định nghĩa nguyên hàm và tích phân bất định

Hàm $F(z)$ gọi là nguyên hàm của $f(z)$ trong miền D nếu

$$F'(z) = f(z), \ \forall z \in D$$

Khi đó, $F(z) + K$ với K là hằng số phức tùy ý, cũng là nguyên hàm của $f(z)$, và gọi là ***họ nguyên hàm*** hay ***tích phân bất định*** của hàm số $f(z)$ trên miền D, ký hiệu $\int f(z)dz$.

Vậy $F'(z) = f(z)$ thì $\int f(z)dz = F(z) + K$ (4.6), với K là hằng số phức tùy ý.

4.3. Định lý 4.3

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và z_0 , z lần lượt là điểm cố định và điểm chạy trong D thì hàm $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$ là một nguyên hàm của $f(z)$ trên D.

Ví dụ 4.4

a) $(z^2 + 4\sin z)' = 2z + 4\cos z$ nên $\int (2z + 4\cos z)dz = z^2 + 4\sin z + K$

b) $(a^z)' = a^z \ln a$ nên $\int a^z dz = \dfrac{a^z}{\ln a} + K$ ◆

5- Công thức Newton - Leibnitz

Nếu $F(z)$ là một nguyên hàm nào đó của hàm giải tích $f(z)$ trong miền đơn liên D thì $\forall a, b \in D$ ta có công thức Newton - Leibnitz.

$$\boxed{\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a) = F(z)\Big|_a^b} \qquad (4.7)$$

★ ***Chú ý:*** Các tính chất tích phân, bảng các tích phân cơ bản, các phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần của hàm thực vẫn đúng đối với ***tích phân hàm phức*** (*Điều kiện*: ***Hàm giải tích trên miền đơn liên***).

Ví dụ 4.5 Tính các tích phân: a) $\int_0^{1+i} (z+2)e^{iz}dz$ b) $\int_1^{1+i} (z-1)^{20} zdz$

Giải

a) $$\int_0^{1+i} (z+2)e^{iz}dz = \left((z+2)\frac{e^{iz}}{i}\right)\Bigg|_0^{1+i} + i\int_0^{1+i} e^{iz}dz = \left((i+3)\frac{e^{i(1+i)}}{i} - \frac{2}{i}\right) + e^{iz}\Big|_0^{1+i} =$$

$$= \left((i+3)\frac{e^{i(1+i)}}{i} - \frac{2}{i}\right) + e^{i(1+i)} - 1 = 2e^{i(1+i)} + \frac{3e^{i(1+i)}}{i} + 2i - 1.$$

b) Đặt t = z-1

$$\int_1^{1+i} (z-1)^{20} zdz = \int_0^i t^{20}(1+t)dt = \int_0^i (t^{20} + t^{21})dt = \frac{t^{21}}{21} + \frac{t^{22}}{22}\Bigg|_0^i = \frac{i}{21} + \frac{-1}{22}$$ ◆

6. Công thức tích phân Cauchy, đạo hàm cấp cao của hàm giải tích

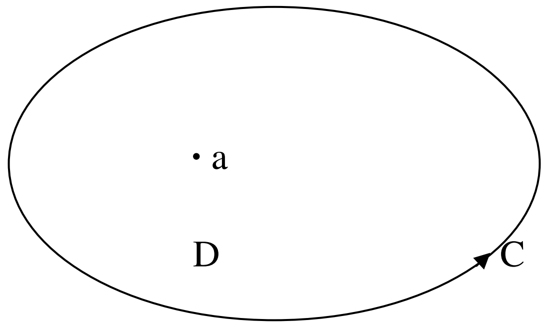
6.1. Định lý 4.4

Nếu hàm f(z) giải tích bên trong và trên biên C của miền đơn liên D , biên C trơn từng khúc, thì tại một điểm a bất kỳ bên trong D hàm f(z) có đạo hàm mọi cấp và

$$\boxed{f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}}\quad n=0,1,2,3,\ \ldots\ldots \qquad (4.8)$$

trong đó chiều đi trên C là chiều dương.

★ Qui ước: o! = 1, $f^{(0)}(a) = f(a)$.



Hình 4.8

6.2. Ý nghĩa

✻ Nếu hàm f(z) giải tích tại z thì nó có đạo hàm mọi cấp và các đạo hàm đó cũng giải tích tại z.

✻ Nếu hàm f(z) giải tích trên miền kín đơn liên bị chặn $\overline{D}$ với biên là C, a là điểm trong của D thì ta có công thức:

$$\boxed{\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)}\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots \quad (4.9)$$

<u>Ví dụ 4.6</u> Áp dụng (4.9) ta có :

a) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{e^{3z}dz}{(z-i)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}3^n e^{3i}$ $\qquad$ ($f(z)=e^{3z}$, $a=i$)

b) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1}\frac{e^{3z}dz}{(z-2)z^2}=\frac{2\pi i}{0!}\frac{e^6}{4}=\frac{\pi ie^6}{2}$ $\qquad$ ($f(z)=\dfrac{e^{3z}}{z^2}, a=2, n=0)$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{e^{3z}dz}{(z-2)z^2}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{e^{3z}}{(z-2)}dz}{z^2}=2\pi i\frac{-7}{4}=\frac{-7\pi i}{2}$ $\qquad$ ($f(z)=\dfrac{e^{3z}}{z-2}, a=0, n=1)$

◆

6.3.Bất đẳng thức Cauchy

Giả sử D là một miền có biên là đường cong C, f(z) là hàm giải tích trên $\overline{D}$, M là giá trị lớn nhất của $|f(z)|$ trên miền $\overline{D}$, R là khoảng cách từ điểm $z_0 \in D$ đến biên C của D, L là độ dài của C thì

$$\boxed{\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!ML}{2\pi R^{n+1}}} \qquad (4.10)$$

Nếu D là hình tròn $|z - z_0| \le R$ thì $L = 2\pi R$ và

$$\boxed{\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{Mn!}{R^n}},\ n = 0, 1, 2, ... \qquad (4.11)$$

Bất đẳng thức (4.11) gọi là bất đẳng thứ Cauchy.

7. Định lý Louville

Nếu hàm f(z) giải tích và bị chặn trong toàn mặt phẳng thì nó là hàm hằng.

....

BÀI TẬP

Bài 4.1 Tính $I = \int_C |z|\,\mathrm{Im}\,z dz$ nếu :

a) C là đoạn thẳng nối hai điểm -i và i.

b) C là nửa trái đường tròn đơn vị nối từ điểm -i đến i.

b) C là nửa phải đường tròn đơn vị nối từ điểm -i đến i.

Bài 4.2 Tính $I = \int_C |z| dz$ nếu :

a) C là đoạn thẳng nối hai điểm -1 và 1.

b) C là nửa trên đường tròn đơn vị nối từ điểm -1 đến 1.

b) C là nửa dưới đường tròn đơn vị nối từ điểm -1 đến1.

Bài 4.3 Tính $\int_1^i \bar{z} dz$ dọc theo mỗi đường sau:

a) Dọc theo trục 0x đến 0 , rồi dọc theo trục 0y đến i.

b) Dọc theo đường y = 1 – x.

c) Dọc theo đường thẳng đứng đến (1+i) , rồi dọc theo đường ngang đến i.

Bài 4.4 Tính $I_k = \oint_{C_k} \frac{z^2}{z-2i} dz$

a) $C_1 : |z| = 5$ b) $C_2 : |z| = 1$

Bài 4.5 Tính I = $\oint\limits_C \frac{dz}{z^2+9}dz$

a) C :|z - 2i| = 2 b) C :|z +2i| = $\frac{1}{2}$

Bài 4.6

a) Tính tích phân $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2-2z+2)}$, với C là đường tròn | z - i| = 2.

b) Tính tích phân A = $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2+4)}$, với C là đường tròn | z -2 i| = 3.

Bài 4.7 Tính các tích phân

a) $\int_0^i (z+2i)e^{3iz}dz$ b) $\int_0^{1+\pi i} z\sin z dz$ c) $\int_i^1 \frac{dz}{(z+1)^2}$ d) $\int_0^{2i}(6iz+3)\sin(iz)dz$

Bài 4.8 Tính các tích phân

1) $\oint\limits_c \frac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$; C : |z - i| = 4

2) $\oint\limits_c \frac{e^{zt}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$; t > 0, C : |z| = 3

3) $\oint\limits_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-3)}dz$; C : |z| = 2

4) $\oint\limits_c \frac{e^{zt}dz}{(z+1)^4}$; C : |z| = 3

5) $\oint\limits_C \frac{zdz}{(z-1)(z+1)^2}$; C : |z - 2| = 4

6) $\oint\limits_c \frac{\cos^2 tzdz}{z^3}$; C : |z| = 1, t > 0.

7) $\oint\limits_C \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$; C : |z | = 2

8) $\oint\limits_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$, C: $x^2+y^2-2x=0$

9) $\oint\limits_c \frac{z^2dz}{z^2+4}$; C là biên của hình vuông có các đỉnh là : ± 2, ± 2 + 4i.

Bài 4.9 Cho t > 0 và C là đường cong đơn đóng bất kỳ bao điểm z = -1. Chứng minh rằng : $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{ze^{zt}dz}{(z+1)^3} = \left(t-\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$

Bài 4.10 Tính các tích phân: **A** = $\int \frac{(z+i)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$ $B=\int(3iz+9)\cos(1-iz)dz$

Bài 4.11 Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{1}{(z-2)^2(z^2+1)}dz$ với C là biên của hình chữ nhật có các đỉnh là $(-1;2), (-1;-\frac{1}{2}), (3;-\frac{1}{2}), (3;2)$.

Bài 4.12 Tính các tích phân:

a) $\oint\limits_{|z+4i|=2} \frac{ze^{9z}dz}{(z-1)^2}$ b) $\oint\limits_{|z-2i|=6} \frac{6z+e^{5z}dz}{(z-1)^2}$

c) $\oint\limits_{|z-3i|=3} \frac{(z^2+e^{3z})dz}{(z-3)^2}$ d) $\oint\limits_{|z-4|=2} \frac{(7z+e^z)dz}{(z-3)^2}$

Bài 4.13 Tính các tích phân:

a) $\mathbf{A} = \oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{(z^2+4)(z+1)^2}$ b) $\mathbf{B} = \oint\limits_{|z+2|=2} \frac{dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$

c) $\mathbf{I} = \oint\limits_{|z-2-2i|=3} \frac{dz}{(z^2+4)(z-2)^3}$ d) $\boldsymbol{J} = \oint\limits_{|z+i|=5} \frac{z^2+e^{2iz}}{(z-2)^2}dz$

Chương 5

CHUỖI HÀM BIẾN PHỨC

Trong chương này, bạn sẽ học

- Chuỗi số phức.
- Chuỗi hàm biến phức, miền hội tụ chuỗi hàm phức.
- Chuỗi lũy thừa phức, cách tìm bán kính hội tụ và hình tròn hội tụ.
- Chuỗi Taylor, chuỗi Maclaurin.
- Chuỗi Laurent, điểm bất thường cô lập của hàm giải tích. Phân loại điểm bất thường cô lập.

§ 1.CHUỖI SỐ PHỨC

Khái niệm chuỗi số phức tương tự chuỗi số thực .

1.1- Định nghĩa

- Cho dãy số phức $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Khi đó chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (5.1)$$

gọi là chuỗi số phức.

- Tổng n số hạng đầu tiên : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi.
- Nếu dãy $\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn là S thì ta nói chuỗi (5.1) hội tụ và có tổng là **S**.
- Nếu dãy $\{S_n\}$ có giới hạn bằng ∞ hoặc không tồn tại thì ta nói chuỗi (5.1) phân kỳ.

1.2- Định lý 5.1

Nếu $u_n = a_n + ib_n$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Khi đó chuỗi phức $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là $S = \alpha + i\beta$ khi và chỉ khi hai chuỗi thực $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là α, và β.

Vậy việc khảo sát sự hội tụ của chuỗi số phức được đưa về việc khảo sát sự hội tụ của hai chuỗi số thực.

<u>Ví dụ 5.1</u> Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$

<u>Giải</u>

Theo công thức Euler ta có: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i\sin n}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n}} + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$

Mà $\left|\frac{\cos n}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối.

Tương tự chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$ cũng hội tụ tuyệt đối.

Suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$ hội tụ. ◆

1.3- Định lý 5.2 (tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối)

Nếu chuỗi các modun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối.

<u>Ví dụ 5.2</u> Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{4^n.n\sqrt{n}}$, với $|z-1| < 4$.

<u>Giải</u>

Ta có $\left|\frac{(z-1)^n}{4^n.n\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{|z-1|^n}{4^n.n\sqrt{n}}\right| \le \frac{4^n}{4^n.n\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ với mọi z thỏa $|z-1| < 4$.

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(z-1)^n}{4^n.n\sqrt{n}}\right|$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{4^n.n\sqrt{n}}$ hội tụ. ◆

§ 2.CHUỖI HÀM PHỨC

2.1.Định nghĩa

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots\ldots + u_n(z) + \ldots\ldots\ldots\ldots$ (5.2)

trong đó các số hạng $u_n(z)$ là các hàm biến phức đơn trị có cùng miền xác định nào đó , gọi là chuỗi hàm phức.

- Tổng $S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z)$ là tổng riêng của thứ n của chuỗi hàm (5.2).
- Tại mỗi điểm cố định $z = z_0$, chuỗi (5.2) trở thành chuỗi số phức

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0) = u_1(z_0) + u_2(z_0) + \ldots\ldots + u_n(z_0) + \ldots\ldots \qquad (5.2')$$

- Nếu chuỗi (5.2') hội tụ thì điểm z_0 gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm (5.2). Tập hợp tất cả các điểm hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm (5.2). Trong miền hội tụ đó nếu giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = f(z)$$

thì hàm f(z) được gọi là tổng của chuỗi (5.2).

Rõ ràng hàm $f(z)$ xác định trong toàn miền hội tụ của (5.2) và ta viết

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

Khi đó $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi hàm (5.2). Tại mọi z thuộc miền hội tụ của chuỗi hàm (5.2) thì $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$

- Nói cách khác chuỗi hàm (5.2) hội tụ trong miền D khi và chỉ khi : $\forall z \in D$ và $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số $N(\varepsilon,z)$ sao cho $\forall n > N(\varepsilon,z)$ ta có $|\, f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$.
- Trong đó trường hợp số $N(\varepsilon,z)$ không phụ thuộc vào z chạy trong D mà chỉ phụ thuộc vào ε, tức là $N(\varepsilon,z) = N(\varepsilon)$, thì ta nói chuỗi hàm (5.2) hội tụ đều trong miền D. Tiêu chuẩn dưới đây ta có điều kiện đủ để một chuỗi hàm hội tụ đều trong một miền nào đó.

2.2- Tiêu chuẩn Weierstrass.

Nếu | $u_n(z)$ | ≤ a_n, $\forall z \in D$ và chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ hội tụ đều trên miền D.

2.3 - Định lý 5.3 (tính chất chuỗi hàm hội tụ đều)

Giả sử chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ hội tụ đều về hàm f(z) trên miền D; nghĩa là

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

Khi đó ta có:

(**i**) Nếu các số hạng $u_n(z)$ liên tục trên miền D thì hàm $f(z)$ liên tục trên D.

(**ii**) Nếu hàm $\varphi(z)$ bị chặn (theo môđun) trên miền D thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z).\varphi(z)$ cũng hội tụ đều trên D.

(**iii**) Nếu các số hạng $u_n(z)$ liên tục trên miền D thì ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi dọc theo một đường cong C trơn từng khúc bất kỳ nằm trong D; tức là

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)dz = \int_C u_1(z)dz + \int_C u_2(z)dz + ... + \int_C u_n(z)dz + ...$$

(**iv**) Nếu các số hạng $u_n(z)$ giải tích trong miền D thì $f(z)$ cũng giải tích trên miền D và ta có: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) = u_1^{(k)}(z) + u_2^{(k)}(z) + ... + u_n^{(k)}(z) + ...$ hơn nữa chuỗi các đạo hàm cấp k là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ cũng hội tụ đều trong D.

§3. CHUỖI LŨY THỪA

3.1. *Định nghĩa* Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots\ldots + a_n(z-a)^n + \ldots\ldots\ldots \qquad (5.3)$$

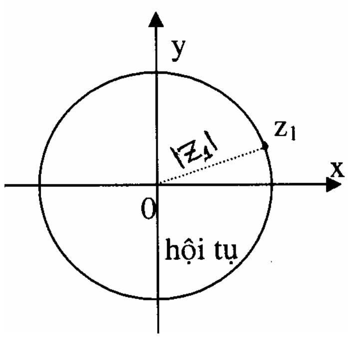
trong đó a và a_n là các hằng số phức.

Nếu đặt Z = z - a thì chuỗi (5.3) có thể viết lại dưới dạng chính tắc

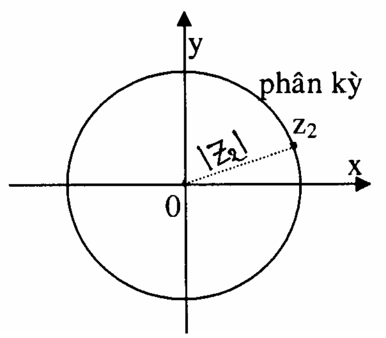
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n = a_o + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n Z^n + \ldots\ldots \qquad (5.3')$$

3.2- Tiêu chuẩn Abel

Nếu chuỗi lũy thừa dạng chính tắc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (5.3') hội tụ tại điểm $z_1 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $|z| < |z_1|$ và hội tụ đều trong mọi hình tròn $|z| \leq r$ với $0 < r < |z_1|$. (*Hình 5.1*)



Hình 5.1



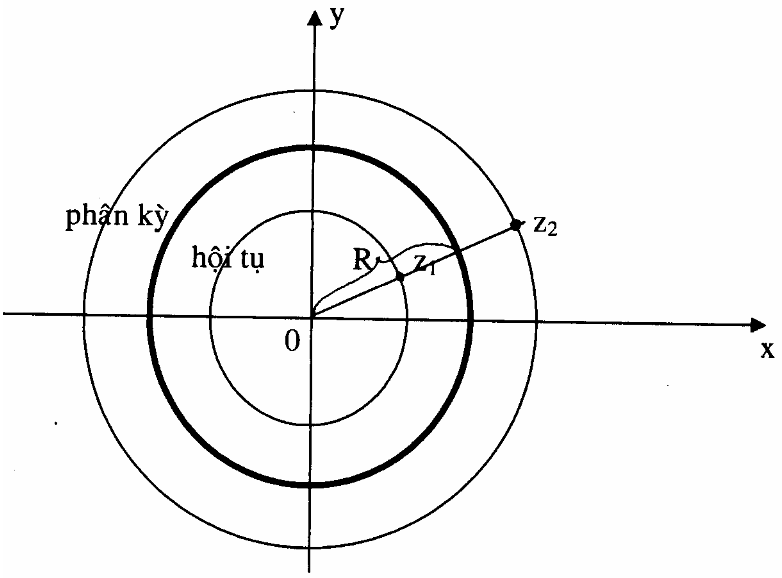
Hình 5.2

✻ Hệ quả

i) Nếu chuỗi lũy thừa dạng chính tắc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (5.3') phân kỳ tại z_2 thì nó phân kỳ tại mọi điểm của miền $|z| > |z_2|$.(*Hình 5.2*)

ii) Tồn tại duy nhất số $R \geq 0$ sao cho chuỗi (5.3') hội tụ tại mọi điểm bên trong hình tròn $|z| < R$ và phân kỳ tại mọi điểm bên ngoài hình tròn. (*hình 5.3*)

Khi đó số R gọi là bán kính hội tụ và hình tròn $|z| < R$ gọi là hình tròn hội tụ của chuỗi (5.3'). Tại những điểm trên đường tròn $|z| = R$ chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ



Hình 5.3

Bán kính hội tụ của chuỗi (5.3) bằng bán kính hội tụ của chuỗi (5.3'), hình tròn hội tụ của chuỗi (5.3) là hình tròn $|z - a| < R$.

3.3 . Cách tìm bán kính hội tụ và hình tròn hội tụ

Công thức tìm bán kính hội tụ của chuỗi trong trường hợp $a_n \neq 0$, $\forall n > N_o$ cố định là:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{hoặc} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

- ♦ Bán kính hội tụ của chuỗi (5.3') và chuỗi (5.3) là R.
- ♦ Hình tròn hội tụ của chuỗi (5.3') là $|z| < R$.
- ♦ Hình tròn hội tụ của chuỗi (5.3) là $|z - a| < R$.

Nếu $R = 0$ thì chuỗi (5.3') chỉ hội tụ tại $z = 0$, chuỗi (5.3) chỉ hội tụ tại $z = a$. Nếu $R = \infty$ thì hội tụ tại mọi z.

Để tìm bán hính hội tụ và hình tròn hội tụ của chuỗi (5.3) ta còn áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy cho chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n(z-a)^n\right|$.

<u>**Ví dụ 5.3**</u> Tìm bán kính hội tụ và hình tròn hội tụ chuỗi luỹ thừa: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^n}{3^n}$

Giải

Bán kính hội tụ: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{3^n}\cdot\frac{3^{n+1}}{n+1}\right| = 3$

Hình tròn hội tụ: $|z-1| < 3$ ◆

Ví dụ 5.4 Tìm miền hội tụ chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{(n+1)^2 4^n}$

Giải

Bán kính hội tụ: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^n 4^{n+1}}{(n+1)^2 4^n} = 4$

Hình tròn hội tụ: $|z+2| < 4$

Trên đường tròn $|z+2| = 4$ ta có: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(z+2)^n}{(n+2)^2 4^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z+2|^n}{(n+1)^2 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ chuỗi hàm là: $|z+2| \le 4$ ◆

3.4. Tính chất chuỗi lũy thừa

i) Tổng của chuỗi lũy thừa là hàm giải tích bên trong hình tròn hội tụ của chuỗi.

ii) Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi lũy thừa bên trong hình tròn hội tụ của chuỗi. Chuỗi mới có được cũng là chuỗi lũy thừa có cùng bán kính hội tụ với chuỗi ban đầu.

iii) Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa bên trong hình tròn hội tụ của chuỗi. Chuỗi mới có được cũng là chuỗi lũy thừa có cùng bán kính hội tụ với chuỗi ban đầu.

....

BÀI TẬP

Bài 5.1 Tìm bán kính hội tụ và hình tròn hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n4^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1-i)^n}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-3i)^n}{3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n(z-1)^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4(z-i)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\sqrt{n}}(z+i)^n$

Bài 5.2 Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(n+1)^3 4^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$

§4. CHUỖI TAYLOR- CHUỖI MACLAURIN

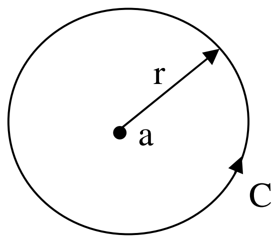
- Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ có bán kính hội tụ là $R \neq 0$. Khi đó theo định lý Abel chuỗi hội tụ đều trong mọi hình tròn kín $|z - a| \le r < R$. Vì mỗi số hạng của một chuỗi lũy thừa là một hàm giải tích nên theo (iv) của định lý 5.3 ở phần (2.3) tổng $f(z)$ của chuỗi là một hàm giải tích trong miền hội tụ của chuỗi.
- Ngược lại nếu cho trước một hàm $f(z)$ giải tích trên hình tròn $|z - a| < R$ thì vấn đề đặt ra là hàm $f(z)$ có thể khai tiển thành chuỗi lũy thừa của (z - a) trên hình tròn đó không?

4.1. Định lý 5.4

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong hình tròn $|z - a| < R$ thì với mọi z trong hình tròn đó ta có:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}}.(z-a)^n} \qquad (5.4)$$

Trong đó C là đường tròn $|z - a| < r$ với $r < R$.



Hình 5.4

- Chuỗi (5.4) được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(z)$ tại a. Người ta cũng chứng minh được khai triển $f(z)$ thành chuỗi lũy thừa của (z - a) ở (5.4) là duy nhất.
- Khi a = 0 thì chuỗi Taylor gọi là chuỗi Maclaurin của hàm $f(z)$.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)dt}{t^{n+1}} z^n}$$

<u>**Ví dụ 5.5**</u> Với hàm $f(z) = e^z$ thì $f^{(n)}(z) = e^z, \forall z$ và $f^{(n)}(a) = e^a$. Suy ra

- $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n$ là khai triển Taylor của hàm số tại a.

♦ Với a = 0 thì $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ là khai triển Maclaurin của hàm số. ◆

4.2. Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp cơ bản

① $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}.$

② $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$

③ $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall z \in \mathbb{C}.$

④ $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)......(\alpha-n+1)}{n!} z^n + ... =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)......(\alpha-n+1)}{n!} z^n$, với $|z| < 1$, α là số phức và chọn $1^\alpha = 1$. Nếu $\alpha = k$ là số tự nhiên là chuỗi trở thành đa thức bậc k của z và hội tụ tại mọi z.

⑤ $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, với $|z| < 1$

⑥ $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + ... + (-1)^n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, với $|z| < 1$

⑦ $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ... + (-1)^{(n+1)} \frac{z^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, với $|z| < 1$.

4.3. Phương pháp khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Chúng ta thường dùng các phương pháp sau đây và phối hợp lại để khai triển hàm số thành chuỗi.

❶ Áp dụng công thức Taylor và Maclaurin.

❷ Áp dụng các khai triển cơ bản.

❸ Đổi biến.

❹ Áp dụng tính chất đạo hàm và tích phân chuỗi lũy thừa.

Ví dụ 5.6

a) Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{1-z}$ thành chuỗi lũy thừa của (z-3i).

b) Khai triển hàm $f(z) = e^{z^2-4z+3}$ thành chuỗi lũy thừa của (z-2).

c) Khai triển hàm $f(z) = \frac{z}{4+z^2}$ thành chuỗi lũy thừa của z.

Giải

a) Đặt u = z-3i $\Rightarrow$ z = 3i+u $\Rightarrow$ $f(z) = \frac{1}{1-3i-u} = \frac{1}{1-3i}\left(\frac{1}{1-\frac{u}{1-3i}}\right)$. Suy sa

$f(z) = \frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u}{1-3i}\right)^n$ với $\left|\frac{u}{1-3i}\right| < 1$.

Vậy $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$ với $|z-3i| < \sqrt{10}$.

b) Đặt u = z-2 $\Rightarrow$ z = u+2 $\Rightarrow$ $f(z) = e^{u^2-1} = \frac{1}{e}e^{u^2} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n}}{n!}, \forall u$.

Vậy $f(z) = e^{z^2-4z+3} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}, \forall z$.

c) $f(z) = \frac{z}{4+z^2} = \frac{z}{4}.\frac{1}{1+\frac{z^2}{4}} = \frac{z}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$, với $|z| < 2$. ◆

4.4- Không điểm của hàm giải tích

4.4.1- Định nghĩa

- Cho w = f(z) là một hàm giải tích trên miền D. Điểm $z_0 \in D$ được gọi là không điểm cấp m của f(z) nếu $f(z) = (z - z_0)^m\varphi(z)$, với $\varphi(z_0) \neq 0$

  Khi m = 1 thì z_0 được gọi là không điểm đơn của hàm f(z).

- Vì f(z) giải tích tại z_0 nên $\varphi(z)$ cũng giải tích tại z_0 và $\varphi(z_0) \neq 0$. Khai triển hàm $\varphi(z)$ thành chuỗi lũy thừa của $(z - z_0)$ ta được

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots, \text{ với } b_0 = \varphi(z_0) \neq 0.$$

Suy ra $f(z) = b_0(z - z_0)^m + b_1(z - z_0)^{m+1} + \ldots$

Vậy nói cách khác, điểm z_0 gọi không điểm cấp m của hàm f(z) nếu tại lân cận của z_0, hàm f(z) có khai triển Taylor :

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots \quad \text{với } a_m \neq 0.$$

Ví dụ 5.7

a) z = 2i là không điểm cấp 5 của hàm $f(z) = (z-2i)^5e^{3z}$; vì f(2i) = 0 và $\varphi(z) = e^{3z}$ thỏa $\varphi(2i) = e^{6i} \neq 0$.

b) $z = 0$ là không điểm cấp 2 của hàm $f(z) = z\sin z$ vì khai triển Taylor $f(z)$ tạo $z = 0$

là : $z\sin z = z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\right) = z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + ...\right)$

$$= z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^8}{7!} + ...$$ ◆

4.4.2. Định lý (về tính duy nhất của hàm giải tích)

Giả sử $f_1(z)$, $f_2(z)$ là hai hàm giải tích trong miền D, và trùng nhau trên một tập vô hạn các điểm $\{z_n\}$ có giới hạn là $z_0 \in D$. Khi đó $f_1(z) = f_2(z)$, $\forall z \in D$.

....

BÀI TẬP

Bài 5.3 Khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Taylor quanh điểm a cho thước và tìm bán kính hội tụ của chuỗi.

a) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ $\quad$ $a = 0$ và $a = 1$.

b) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ $\quad$ $a = 0$ và $a = 2$.

c) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad$ $a = i$.

d) $f(z) = e^z$ $\quad$ $a = \pi i$

e) $f(z) = chz$ $\quad$ $a = \pi i$

f) $f(z) = shz$ $\quad$ $a = \pi i$

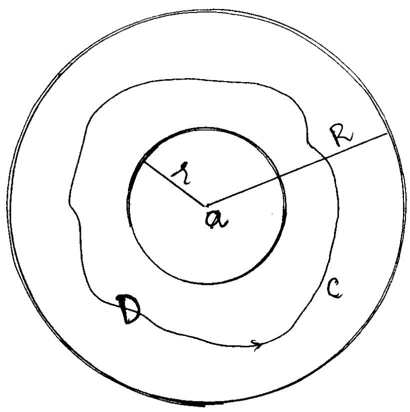
§5. CHUỖI LAURENT VÀ ĐIỂM BẤT THƯỜNG CÔ LẬP CỦA HÀM GIẢI TÍCH

5.1. Chuỗi Laurent

**** Định lý và định nghĩa*** (định lý 5.5)

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn D : $0 \le r < |z - a| < R \le \infty$ thì với mọi z thuộc D ta có khai triển:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (5.5)$$

trong đó $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}}$; n = 0, ± 1, ± 2, ... với C là đường cong kín bất kỳ bao điểm a và nằm trọn trong hình vành khăn.



Hình 5.5

Chuỗi (5.5) gọi là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ trong mọi hình vành khăn $r' \le |z - a| \le R'$ với r' > r và R'< R.

Chuỗi (5.5) được tách ra thành hai phần:

- Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = f_1(z)$ hội tụ với $|z - a| < R$ và được gọi là phần đều.
- Chuỗi $\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n = \dfrac{a_{-1}}{(z-a)} + \dfrac{a_{-2}}{(z-a)^2} + ... = f_2(z)$ hội tụ với $|z - a| > r$ và được gọi là phần chính.

Nhận xét Chuỗi Taylor là trường hợp đặc biệt của chuỗi Laurent trong đó phần chính triệt tiêu.

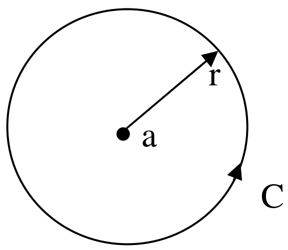
Người ta chứng minh được rằng khai triển Laurent của một hàm $f(z)$ trong một hình vành khăn tâm a cho trước là duy nhất. Tuy nhiên trong những hình vành khăn khác nhau thì khai triển Laurent của $f(z)$ có thể khác nhau.

5.2 - Điểm bất thường cô lập của hàm giải tích

✻ **<u>Định nghĩa</u>** Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong một lân cận nào đó của điểm $a \neq \infty$ trừ điểm a, tức $f(z)$ giải tích trong miền $0 < |z - a| < r$, thì a được gọi là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $f(z)$.

Khi đó $f(z)$ có thể khai triển thành chuỗi Laurent trong miền : $0 < |z - a| < r$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n .$$



Hình 5.6

✻ Nhận xét: Trong khai triển trên hệ số $a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(t)dt = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$.

✻ **<u>Phân loại</u>** Người ta chia điểm bất thường cô lập thành 3 loại như sau:

a) Cực điểm:

Điểm bất thường cô lập z = a của $f(z)$ được gọi là cực điểm cấp m nếu khai triển Laurent của $f(z)$ trong hình tròn $0 < |z - a| < r$ có dạng.

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots.. + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \text{ với } a_{-m} \neq 0.$$

♦ Nếu m = 1 thì a được gọi là cực điểm đơn.

♦ Nếu a là cực điểm cấp m của f(z) thì $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ và $\lim\limits_{z\to a} (z-a)^m f(z) = A \neq 0$.

♦ Ngược lại **nếu** $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ và m là số nguyên dương thỏa $\lim\limits_{z\to a} (z-a)^m f(z) = A$, với $A \neq 0$ và $A \neq \infty$, **thì** a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

b) Điểm bất thường bỏ được:

Điểm bất thường cô lập z = a của hàm giải tích $f(z)$ gọi là điểm bất thường bỏ được nếu khai triển Laurent của $f(z)$ trong miền 0 < |z -a| < r có phần chính triệt tiêu.

Tức là: $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$.

c) Điểm bất thường cốt yếu

Điểm bất thường cô lập của z = a của hàm f(z) gọi là điểm bất thường cốt yếu nếu phần chính của khai triển Laurent hàm $f(z)$ trên miền 0 < |z -a| < r có vô số số hạng.

__Ví dụ 5.8__ Khai triển Laurent các hàm số sau tại các điểm bất thường cô lập đã chỉ ra và gọi tên các điểm bất thường cô lập đó:

a) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-2)^3}$, tại z = 2.

b) $f(z)=(z\text{-}1)\cos\dfrac{1}{z-1}$, tại z = 1.

c) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$, tại z = 0.

__**Giải**__

a) $$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-2)^3}=e^4\frac{e^{2(z-2)}}{(z-2)^3}=\frac{e^4}{(z-2)^3}e^{2(z-2)}=\frac{e^4}{(z-2)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^n}{n!}.$$

Vậy $$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-2)^3} = e^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^{n-3}}{n!}$$

$$=\frac{e^4}{(z-2)^3}+\frac{2e^4}{(z-2)^2}+\frac{2^2e^4}{2!(z-2)}+\frac{2^3e^4}{3!}+\frac{2^4e^4(z-2)}{4!}+\ldots\ldots$$

Suy ra z = 2 là cực điểm cấp 3 của hàm $f(z)$.

b) $$f(z)=(z\text{-}1)\cos\frac{1}{z-1}=(z\text{-}1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z-1)^{2n-1}}.$$

Suy ra z = 1 là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$.

c) $$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots..\right)$$

$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots..$$

Suy ra z = 0 là điểm bất thường bỏ được của hàm $f(z)$. ◆

BÀI TẬP

Bài 5.4 Khai triển Laurent các hàm số sau tại các điểm bất thường cô lập đã chỉ ra và gọi tên các điểm bất thường cô lập đó:

1) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, tại $z = 1$

2) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, tại $z = -2$

3) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$, tại $z = 0$

4) $f(z) = (z - 3)\sin\dfrac{1}{z+2}$, tại $z = -2$

5) $f(z) = \dfrac{1}{z\,(z-3)^2}$, tại $z = 3$.

6) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$, tại $z = 0$.

7) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$, tại $z = 1$.

8) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, tại $z = i$.

Bài 5.5 Khai triển Laurent hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$

a) Trong hình vành khăn : $1 < |z| < 3$.

b) Trong miền : $|z| > 3$.

c) Trong miền : $0 < |z + 1| < 2$.

d) Trong miền : $|z| < 1$.

Bài 5.6 Tìm các 0-điểm của các hàm số sau và chỉ rõ cấp của chúng.

a) $w = (z^2+9)(z^2+4)^5$

b) $w = (1-e^z)(z^2-4)^3$

c) $w = z^7 + 3z^5$

d) $w = 4z^2 + 12iz - 9$

Bài 5.7 Tìm và phân loại các điểm bất thường cô lập của các hàm số $w = f(z)$ sau

a) $w = \dfrac{z+2}{(z-1)^3.z.(z+1)}$

b) $w = \dfrac{\sin z}{z^4}$

c) $w = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$

d) $w = \dfrac{2}{(z^2+i)^2}$

e) $w = \cos\dfrac{1}{z+i}$

f) $w = \sin\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$

g) $w = z e^{\frac{1}{z}}$

h) $w = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$

i) $w = \cos\dfrac{1}{z}$

Bài 5.8

a) Khai triển hàm $f(z) = z^2\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$ thành chuỗi Laurent quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 0$.

b) Tính tích phân sau : $A = \oint\limits_C z^2\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)dz$, với C là đường tròn $|z| = 3$.

Bài 5.9

a) Khai triển hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ thành chuỗi Laurent quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 1$.

b) Tính tích phân sau : $A = \oint\limits_C \left(e^{\frac{1}{z-1}} + e^z\right)dz$, với C là đường tròn $|z| = 4$.

Chương 6

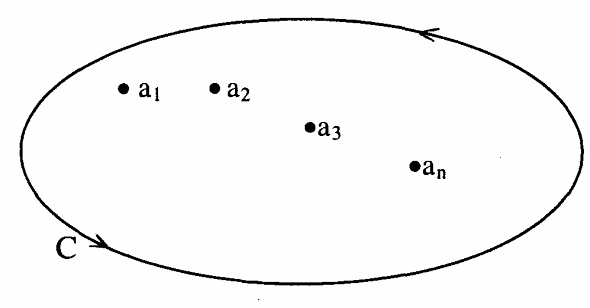
THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

Trong chương này, bạn sẽ học

- Khái niệm thặng dư của hàm giải tích tại các điểm bất thường cô lập.
- Cách tính thặng dư.
- Ứng dụng thặng dư để tính tích phân dọc theo đường cong kín.
- Ứng dụng thặng dư để tính tích phân hàm lượng giác.
- Ứng dụng thặng dư để tính một số dạng tích phân suy rộng loại 1.

....

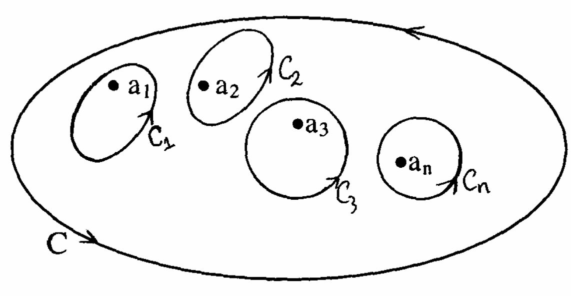
Giả sử chúng ta cần tính tích phân $\oint\limits_C f(z)dz$ với C là đường cong kín trơn hoặc trơn từng khúc và hàm $f(z)$ giải tích bên trong và trên C trừ một số hữu hạn điểm bất thương cô lặp $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ nằm bên trong C.



Hình 6.1

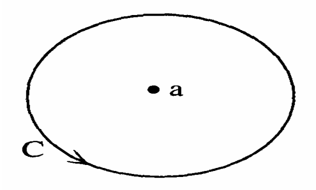
Trong chương 4 ta đã biết

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_{C_1} f(z)dz + \oint\limits_{C_2} f(z)dz + \ldots\ldots\ldots\ldots + \oint\limits_{C_n} f(z)dz$$



Hình 6.2

Như vậy ta cần tính các tích phân dạng $\oint_C f(z)dz$, với điều kiện $f(z)$ giải tích trên C và bên trong C trừ điểm bất thường duy nhất a.



Hình 6.3

Mặt khác trong chương 5 ta đã biết hàm $f(z)$ có thể khai triển thành chuỗi Laurent quanh điểm bất thường cô lập a như sau

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n$$

Trong đó hệ số $a_{-1}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(t)dt=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$.

1. Định nghĩa thặng dư

Thặng dư của hàm giải tích $f(z)$ tại điểm bất thường cô lập a được ký hiệu và định nghĩa bởi:

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z),a]:=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz} \qquad (6.1)$$

Trong đó C là đường cong kín bất kỳ, trơn hoặc trơn từng khúc, không tự cắt, bao điểm a và hàm $f(z)$ giải tích bên trong và trên C trừ điểm a. (hình 5.3)

2. Cách tính thặng dư

∗ *<u>Tổng quát</u>* Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm a có dạng

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

thì

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=a_{-1} \qquad (6.2)$$

∗ *Nếu a là cực điểm cấp m của f(z) thì:*

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)} \qquad (6.3)$$

∗ *Nếu a là cực điểm đơn của hàm f(z) thì:*

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \qquad (6.4)$$

* Nếu $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$, h(a) ≠ 0, g(a) = 0, g'(a) ≠ 0 khi đó a là cực điểm đơn của $f(z)$ và ta có:

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{h(a)}{g'(a)}} \qquad (6.5)$$

Ví dụ 6.1

a) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-2)^3}=\dfrac{e^4}{(z-2)^3}+\dfrac{2e^4}{(z-2)^2}+\dfrac{2^2e^4}{2!(z-2)}+\dfrac{2^3e^4}{3!}+\dfrac{2^4e^4(z-2)}{4!}+\ldots\ldots$

Suy ra $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{2z}}{(z-2)^3},2\right]=\dfrac{2^2e^4}{2}=2e^4$.

b) $f(z)=(z\text{-}1)\cos\dfrac{1}{z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}\dfrac{1}{(z-1)^{2n-1}}$.

Suy ra $\operatorname{Res}\left[(z-1)\cos\dfrac{1}{z-1},1\right]=\dfrac{-1}{2}$.

c) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}=1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\dfrac{z^6}{7!}+\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots..$

Suy ra $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\sin z}{z},0\right]=0$.

d) z = 1 là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2z}$ nên

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2z},1\right]=\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{z}\right)'=\lim_{z\to1}\frac{-1}{z^2}=-1.$$

e) z = 1 là cực điểm đơn của hàm $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2z}$ nên

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2z},0\right]=\lim_{z\to0}\frac{1}{(z-1)^2}=1.$$

◆

Chú ý Nếu a là điểm bất thường cô lập của $f(z)$ và m là số nguyên dương sao cho $\lim\limits_{z\to a}(z\text{-}a)^m f(z)=A$ (với A≠ 0 , A≠ ∞) thì a là cực điểm cấp m của $f(z)$.

3 . Bổ đề Jordan

i) Giả sử hàm f(z) giải tích trong nửa mặt phẳng Imz > 0 ngoại trừ một số hữu hạn tại các cực điểm và $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$ đều với $0\le \arg z\le\pi$. Khi đó

$\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz=0$ với C_R là nửa trên đường tròn |z| = R.

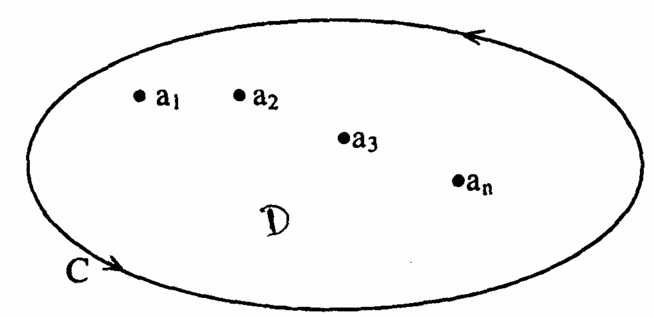
ii) Giả sử hàm f(z) giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$, trừ một số hữu hạn các cực điểm và $\lim\limits_{z \to \infty} zf(z) = 0$ đều với $0 \le \arg z \le \pi$. Khi đó $\lim\limits_{R \to +\infty} \int\limits_{C_R} e^{imz} f(z)dz = 0$.

Với C_R là nửa trên đường tròn $|z| = R$ và $m > 0$.
Bổ đề Jordan được áp dụng để chứng minh các công thức (6.8) và 6.9).

4 . Áp dụng thặng dư tính tích phân dọc theo đường cong kín

Nếu f(z) giải tích trong miền kín $\overline{D}$ giới hạn bởi đường cong kín C trừ một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ nằm trong D thì

$$\boxed{\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), a_k]} \tag{6.6}$$



Ví dụ 6.2

a) Khai triển hàm $f(z) = z\cos\left(\dfrac{1+\pi z}{z}\right)$ thành chuỗi Laurent quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 0$.

b) Tính tích phân sau : $\oint\limits_C z\cos\left(\dfrac{1+\pi z}{z}\right)dz$, với C là đường tròn $|z| = 2$.

Giải

a) $f(z) = z\cos\left(\dfrac{1+\pi z}{z}\right) = z\,[\cos\pi \cos\dfrac{1}{z} - \sin\pi \sin\dfrac{1}{z}] = -z\,\cos\dfrac{1}{z}$

$$= -z\left[1 - \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^4 4!} - \frac{1}{z^6 6!} + ... + (-1)^n \frac{1}{z^{2n}(2n)!} + ...\right]$$

$$= \left[-z + \frac{1}{z2!} - \frac{1}{z^3 4!} + \frac{1}{z^5 6!} - ..... + (-1)^n \frac{1}{z^{2n-1}(2n)!} + ...\right]$$

b) $\oint\limits_C z\cos\left(\dfrac{1+\pi z}{z}\right)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z\cos\left(\dfrac{1+\pi z}{z}\right), 0\right] = 2\pi i\ \dfrac{1}{2!} = \pi i.$

Ví dụ 6.3 Tính tích phân sau : $\oint\limits_C \dfrac{e^z}{(z^2+1)(z-4)}dz$, với C là đường tròn $|z| = 2$.

Giải

Hàm f(z) = $\dfrac{e^z}{(z^2+1)(z-4)}$ có các cực điểm đơn là $z = i, z = -i, z = 4$; trong đó các điểm z = i, z = -i nằm bên trong C và điểm z = 4 nằm bên ngoài C. Do đó

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)(z-4)}dz = 2\pi i\left(\text{Res}[f(z),i]+\text{Res}[f(z),-i]\right)$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{e^z}{(z+i)(z-4)} + \lim_{z\to -i}\frac{e^z}{(z-i)(z-4)}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^i}{2i(i-4)} + \frac{e^{-i}}{(-i-i)(-i-4)}\right] = \pi\left[\frac{e^i}{i-4}+\frac{e^{-i}}{i+4}\right]$$ ◆

Ví dụ 6.4 Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-2i|=3}(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}dz$.

Giải

Khai triển Laurent

$$f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} = (z-i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)^n}{n!} = (z-i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^{n-3}}$$

Tính tích phân

$$I = \oint\limits_{|z-2i|=3}(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}dz = 2\pi i\ \text{Res}[(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}, i] = 2\pi i\frac{1}{4!} = \frac{\pi i}{12}$$

Ví dụ 6.5 Khai triển Laurent hàm $f(z)=z^4\sin\frac{1}{z}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = 0$.

Tính tích phân $I = \oint\limits_{|2i-z|=5}(e^{3z}+z^4\sin\frac{1}{z})dz$.

Giải

$$f(z)=z^4\sin\frac{1}{z} = z^4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^4}{(2n+1)!z^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n-3}}$$

$$I = \oint_{|2i-z|=5} (e^{3z} + z^4 \sin\frac{1}{z})dz = \oint_{|2i-z|=5} e^{3z}dz + \oint_{|2i-z|=5} z^4 \sin\frac{1}{z}dz = 0 + 2\pi i \operatorname{Res}[z^4 \sin\frac{1}{z}, 0]$$

$$= 2\pi i \frac{1}{5!} = \frac{\pi i}{60}$$

(vì hàm số e^{3z} giải tích trên toàn mặt trên toàn mặt phẳng phức nên theo hệ quả 3 của định lý Cauchy $\oint_{|2i-z|=5} e^{3z}dz = 0$)

<u>Ví dụ 6.6</u> Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z-i)^2 \sin\frac{1}{z-i}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = i$. Tính tích phân $I = \oint_{|z-3i|=6} \left((z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i} + e^{5z}\right)dz$.

<u>Giải</u>

$$\sin\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{z-i})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n+1}}$$

$$f(z) = (z-i)^2 \sin\frac{1}{z-i} = (z-i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n-1}}$$

$$I = \oint_{|z-3i|=6} \left((z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i} + e^{5z}\right)dz = \oint_{|z-3i|=6} \left((z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i}\right)dz + \oint_{|z-3i|=6} e^{5z}dz$$

$\oint_{|z-3i|=6} e^{5z}dz = 0$ (vì hàm e^{5z} có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên ***giải tích*** trên toàn mặt phẳng phức)

$$\oint_{|z-3i|=6} \left((z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i}\right)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[(z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i}, i]$$

$$(z+i)^2 = (z-i+2i)^2 = (z-i)^2 + 4i(z-i) - 4$$

Suy ra

$$(z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4i(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4(-1)^n}{(2n+1)!(z-i)^{2n+1}}$$

Nên $\operatorname{Res}[(z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i}, i] = \frac{-1}{3!} - 4 = -\frac{25}{6}$

$$\oint_{|z-3i|=6} \left((z+i)^2 \sin\frac{1}{z-i}\right)dz = 2\pi i\,(-\frac{25}{6}) + 0 = -\frac{25\pi i}{3}$$

5.Ap dụng thặng dư tính tích phân dạng

Xét tích phân $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt$, với R(sint, cost) là hàm hữu tỷ của sint và cost.

Đặt $z = \cos t + i\sin t$

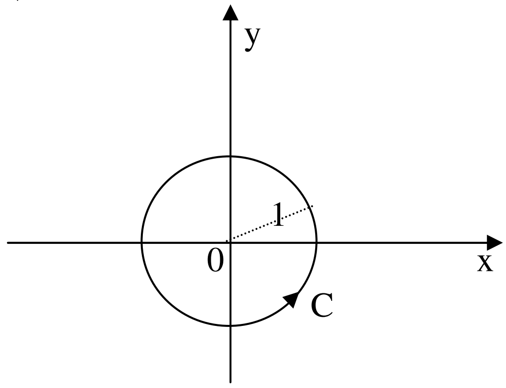
$\bar{z} = \cos t - i\sin t$

$dz = (-\sin t + i\cos t)dt = i(\cos t + i\sin t)dt = izdt$

Khi $0 \xrightarrow{t} 2\pi$ thì z chạy trên đường tròn $|z| = 1$ ngược chiều kim đồng hồ.

Ta có

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{z^2 + z\bar{z}}{2z} = \dfrac{z^2+1}{2z} \\ \sin t = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{z^2 - z\bar{z}}{2iz} = \dfrac{z^2-1}{2iz} \\ dt = \dfrac{dz}{iz} \end{cases}$$



Khi đó
$$\boxed{\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), a_k\right]} \quad (6.7)$$

Trong đó $f(z) = \dfrac{1}{iz} R\left(\dfrac{z^2-1}{2iz}, \dfrac{z^2+1}{2z}\right)$; a_1 , a_2 , ...a_n là điểm bất thường của hàm f(z) thỏa $|a_k| < 1$ và hàm f(z) không có điểm bất thường nào nằm trên đường tròn $|z| = 1$.

<u>Ví dụ 6.7</u> Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2\cot + \sin t}$

<u>Giải</u>

Đặt $\begin{cases} \cos t = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{z^2 + z\bar{z}}{2z} = \dfrac{z^2+1}{2z} \\ \sin t = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = \dfrac{z^2 - z\bar{z}}{2iz} = \dfrac{z^2-1}{2iz} \\ dt = \dfrac{dz}{iz} \end{cases}$.

$$I = \int_C \frac{\frac{dz}{iz}}{3 - 2.\frac{z^2+1}{2z} + \frac{z^2-1}{2iz}} = \int_C \frac{2dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$, C là đường tròn $|z| = 1$.

Hàm $f(z) = \dfrac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ có hai cực điểm là z_1 = 2-i và $z_2 = \dfrac{2-i}{5}$. Cực điểm z_1 nằm bên ngoài C , z_2 nằm bên trong C.

Suy ra $I = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_2] = 2\pi i \lim\limits_{z\to z_2} (z - z_2)f(z) = 2\pi i \lim\limits_{z\to z_2} \dfrac{2(z-z_2)}{(1-2i)(z-z_2)(z-z_1)}$

$$= 2\pi i \frac{2}{(1-2i)(z_2 - z_1)} = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$ ◆

6. Áp dụng thặng dư tính tích phân dạng: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_N(x)}$

Trong đó $Q_N(x)$, $P_m(x)$ lần lượt là các đa thức bậc N, m thỏa $N \ge m + 2$; phương trình $Q_N(x) = 0$ có các nghiệm đơn thực $b_1, b_2, \ldots, b_s$; phương trình $Q_N(z) = 0$ có cać nghiệm phức $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên đối với trục ox. Khi đó:

$$\boxed{TC\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_N(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{P_m(z)}{Q_N(z)}, a_k\right] + \pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}\left[\frac{P_m(z)}{Q_N(z)}, b_k\right]} \qquad (6.8)$$

∗ ***Chú ý:*** Ký hiệu $TC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ dùng để chỉ giá trị chính của tích phân suy rộng.

<u>Ví dụ 6.8</u> Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x-1)(x^2+2x+2)}$

<u>Giải</u>

$(z-1)(z^2+2z+2) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1-i \vee z = -1+i$. Loại nghiệm $z = -1-i$ vì nằm phía dưới trục 0x. Ta có

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+2z+2)}, -1+i\right] + \pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+2z+2)}, 1\right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -1+i} \frac{1}{(z-1)(z+1+i)} + \pi i \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z^2+2z++2)}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(-2+i)(2i)} + \pi i \frac{1}{5} = \frac{-2\pi}{5}$$ ◆

7. Áp dụng thặng dư tính tích phân dạng

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx,\ m > 0.$$

Trong đó hàm f(x) là một phân thức hữu tỷ thỏa: $f(z)$ có các <u>cực điểm đơn</u> $b_1, b_2, \ldots, b_s$ trên trục thực và các cực điểm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên đối với trục 0x; $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Khi đó:

$$\text{TC}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx =$$

$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\left[f(z)e^{imz}, a_k\right] + \pi i\sum_{k=1}^{s}\text{Res}\left[f(z)e^{imz}, b_k\right] \qquad (6.9)$$

Ví dụ 6.9 Tính các tích phân : $\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x dx}{x^2+16}$, $\mathbf{J} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x dx}{x^2+16}$

Giải

$f(x) = \frac{1}{x^2+16}$, m = 2 , hàm $f(z) = \frac{1}{z^2+16}$ có hai cực điểm cấp 1 là z = 4i và z = -4i; trong đó chỉ có điểm 4i ở phía trên trục 0x.

$$\mathbf{I} + i\,\mathbf{J} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x dx}{x^2+16} + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x dx}{x^2+16} = 2\pi i\,\text{Res}\left[\frac{e^{2iz}}{z^2+16}, 4i\right] = 2\pi i\lim_{z\to 4i}\frac{e^{2iz}}{(z+4i)}$$

$$= 2\pi i\,\frac{e^{8i^2}}{8i} = \pi\frac{e^{-8}}{4}.$$

Suy ra $\mathbf{I} = \pi\frac{e^{-8}}{4}$, $\mathbf{J} = 0$. ◆

BÀI TẬP

Bài 6.1 Tính thặng dư của các hàm số sau đây tại các điểm bất thường cô lập của chúng.

1) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

2) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$

3) $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^3}$

4) $f(z) = (z - 3)\sin\frac{1}{z+2}$

5) $f(z) = z e^{\frac{1}{z}}$

6) $f(z) = \cos\frac{1}{z}$

7) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$

8) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$

9) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$

10) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$

11) $f(z) = \frac{1}{z^3-z^5}$

12) $f(z) = \sin\frac{1}{z}\, e^{\frac{1}{z}}$

Bài 6.2 Áp dụng thặng dư tính các tích phân :

1) $\oint\limits_C \frac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$; $C: |z - i| = 4$ 2) $\oint\limits_C \frac{e^{zt}}{\left(z^2+1\right)^2}dz$; $t > 0$, $C: |z| = 3$

3) $\oint\limits_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-3)}dz$; $C: |z| = 2$ 4) $\oint\limits_C \frac{e^{zt}dz}{(z+1)^4}$; $C: |z| = 3$

5) $\oint\limits_C \frac{zdz}{(z-1)(z+1)^2}$; $C: |z - 2| = 4$ 6) $\oint\limits_C \frac{\cos^2 tzdz}{z^3}$; $C: |z| = 1$, $t > 0$.

7) $\oint\limits_C \frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$; $C: |z| = 2$ 8) $\oint\limits_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$, C: $x^2+ y^2- 2x = 0$

9) $\oint\limits_C \frac{z^2dz}{z^2+4}$; C là biên của hình không vuông có các đỉnh là : $\pm 2, \pm 2 + 4i$

Bài 6.3 Tính các tích phân

1) $\oint\limits_C \frac{e^{zt}dz}{z^2(z^2+2z+2)}$, $C: |z| = 3$ 2) $\oint \frac{2z^2+5}{(z+2)^2(z^2+4)z^2}dz$, $C: |z - 2i| = 6$

3) $\oint\limits_C \frac{2z^2+5}{(z+2)^2(z^2+4)z^2}dz$, C là chu vi hình vuông có các đỉnh là 1+i , 2+i, 2+2i , 1+2i.

4) $\oint\limits_C \frac{2+3\sin\pi z}{z(z-1)^2}dz$, C là chu vi hình vuông có các đỉnh là 3+3i, 3-3i ,-3+3i,-3-3i

5) $\oint\limits_C \frac{e^z dz}{(z+3)(z-1)}$, với C là đường tròn $|z - i| = 2$.

Bài 6.4 Tính các tích phân sau (áp dụng thặng dư)

1) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5-3\sin t)^2}$ 2) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\cos t+\sin t}$ 3) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos t}$

4) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{5-3\cos t}dt$ 5) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t+2\sin t+3}$ 6) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\cos t+7\sin t+1}$

Bài 6.5 Áp dụng thặng dư tính các tích phân suy rộng sau :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$ 2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ 3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2+1}$ 5) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^4+1}dx$ 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 2x dx}{(x^2+4)(x-1)}$

7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x dx}{(x^2+4)(x-1)}$ 8) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(1+x^2+x^4)}$ 9) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$

Bài 6.6 a) Khai triển hàm f(z) = $e^{\left(\frac{1}{z+1}\right)}$ thành chuỗi Laurent quanh điểm bất thường cô lập $z_o = -1$.

b) Tính tích phân sau : A = $\oint_C e^{\left(\frac{1}{z+1}\right)} dz$, với C là đường tròn | z | = 3.

Bài 6.7 Áp dụng thặng dư tính các tích phân

a) $\oint_C z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$, C : $|z-1| = 4$

b) $\mathbf{I} = \oint_C z^2 \sin\frac{1}{z} dz$, với C là đường tròn | z | = 1.

c) $\oint_C e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} dz$ C : $|z| = 1$

d) $\oint_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$, với C là đường tròn | z | = 1.

Bài 6.8 Áp dụng thặng dư tính các tích phân

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(x^2+9)}$

b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+16}$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+4)}$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{(x-1)(x^2+9)}$

Bài 6.9 Khai triển Laurent hàm $f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z}$ quanh điểm bất thường cô lập z = 0.

Tính tích phân $I = \oint_{|z-2i|=6} z^3 \cos\frac{1}{z} dz$.

Bài 6.10 Khai triển Laurent hàm $f(z) = z^6 \sin\frac{1}{z}$ quanh điểm bất thường cô lập z = 0.

Tính tích phân $I = \oint_{|2i-z|=3} (e^{5iz} + z^6 \sin\frac{1}{z}) dz$.

Bài 6.11 Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z-i)^5 \cos\frac{1}{z-i}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = i$. Tính tích phân $I = \oint_{|z-3i|=8} \left(e^{-3iz} + (z-i)^5 \cos\frac{1}{z-i} \right) dz$.

Bài 6.12 Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z-1)^4 \sin\frac{1}{z-1}$ quanh điểm bất thường cô lập z = 1. Tính tích phân $I = \oint_{|2i-z|=3} (e^{-6iz} + (z-1)^4 \sin\frac{1}{z-1}) dz$.

Bài 6.13 Tính các tích phân : $\mathbf{I} = \oint_{|z+5i|=8} z^3 e^{\frac{1}{z^2}} dz$ $\mathbf{J} = \oint_{|z-i|=5} (z-1)^4 \cos\frac{1}{z-1} dz$

Chương 7

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ ỨNG DỤNG

Sau khi học xong chương này, bạn có thể:

- Hiểu được khái niệm hàm gốc, hàm ảnh, biến đổi Laplace, phép biến đổi Laplace ngược.
- Hiểu và ứng dụng được các tính chất của phép biến đổi Laplace.
- Hiểu khái niệm tích chập và biết cách tìm ảnh của tích chập, tìm gốc nhờ tích chập.
- Biết cách tìm hàm gốc và đánh giá được cách nào tốt nhất khi có nhiều cách tìm.
- Thực hiện được phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Laplace ngược.
- Ứng dụng được phép biến đổi Laplace để giải: phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình vi tích phân.

---

§1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

1.Hàm gốc

Hàm gốc là hàm phức biến thực $f(t) = u(t) + iv(t)$, thỏa mãn 3 điều kiện sau:

(i) $f(t)$ liên tục hay liên tục từng khúc trên toàn trục t (những điểm gián đoạn(nếu có) thuộc loại 1).

(ii) $f(t) = 0$ khi $t < 0$.

(iii) $f(t)$ **có bậc mũ**. Tức là, tồn tại các số $M > 0$, $s \geq 0$ sao cho $\forall t > 0$ thì $|f(t)| \leq Me^{st}$

Số $s_0 \geq 0$ sao cho bất đẳng thức (iii) thỏa $\forall s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) và không thỏa với $s = s_o - \varepsilon$ (s_{0-} cận dưới chính xác của s) được gọi là chỉ số tăng của hàm $f(t)$.

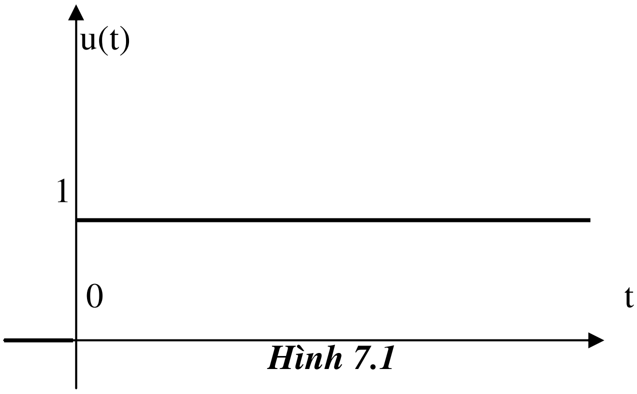
Hàm gốc $f(t)$ khi $t \to +\infty$ rõ ràng hoặc là hữu hạn hoặc $|f(t)|$ tăng ra $+\infty$ nhưng không nhanh hơn hàm mũ $e^{s_0 t}$.

<u>Ví dụ 7.1</u>

a) Hàm bậc thang đơn vị (unit step function, Heavisite's unit function):

$$u(t) := \begin{cases} 0 & khi \ \ t < 0 \\ 1 & khi \ \ t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc với chỉ số tăng $s_o = 0$. Đồ thị của hàm bậc thang đơn vị được vẽ trong hình 7.1.

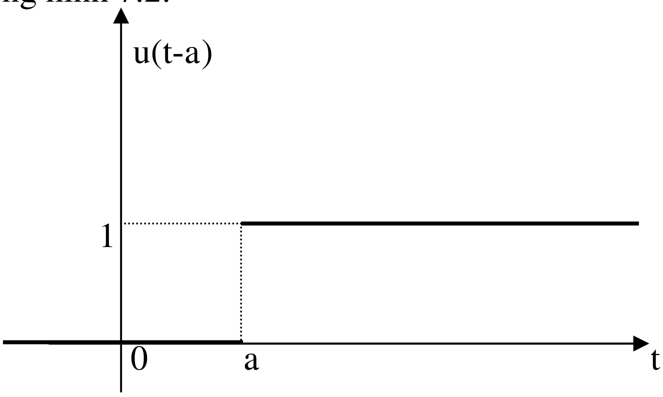


Hình 7.1

b) Hàm f(t) = $\begin{cases} 0 & khi \quad t < 0 \\ \sin t & khi \quad t > 0 \end{cases}$ = u(t)sint là hàm gốc với chỉ số tăng $s_o = 0$.

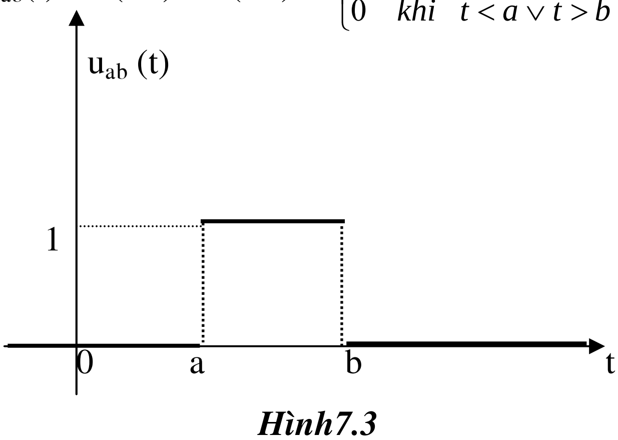
c) Hàm f(t) = $\begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ e^{\alpha t} & \text{khi } t > 0 \end{cases}$ = $u(t)e^{\alpha t}$ là hàm gốc với chỉ số tăng $s_o = \alpha$.

d) Hàm bậc thang đơn vị trễ a đơn vị thời gian: u(t -a) := $\begin{cases} 0 & \text{khi } \ t \langle a \\ 1 & \text{khi } \ t > a \end{cases}$ là hàm gốc với chỉ số tăng $s_o = 0$. Đồ thị của hàm bậc thang đơn trễ a đơn vị thời gian vị được vẽ trong hình 7.2.



Hình 7. 2

d) Hàm lọc: $u_{ab}(t) = u(t\text{-}a) - u(t\text{-}b) = \begin{cases} 1 & khi \quad a < t < b \\ 0 & khi \quad t < a \vee t > b \end{cases}$, đồ thị là hình 7.3.



Hình7.3

Hàm này gọi là hàm lọc vì khi nhân một hàm g(t) bất kỳ với nó, tức là g(t)[u(t-a)-u(t-b)], thì hàm g(t) sẽ bị khử mất ngoài **băng thông** $a < t < b$ và giữ nguyên dạng **trong băng thông** đó. ◆

Qui ước về cách viết

- Hàm u(t) $\xrightarrow{\text{được viết gọn là}}$ 1
- Hàm u(t)sint $\xrightarrow{\text{được viết gọn là}}$ sint
- Hàm u(t) $e^{\alpha t}$ $\xrightarrow{\text{được viết gọn là}}$ $e^{\alpha t}$

⋮

- Hàm u(t)g(t) $\xrightarrow{\text{được viết gọn là}}$ g(t)

2. Hàm ảnh Hàm ảnh của hàm f(t) là hàm F(p) của biến số phức $p = s + i\sigma$ xác định bởi tích phân Laplace $F(p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-pt} f(t)dt \overset{\text{ký hiệu}}{=} \mathscr{L}[f(t)]$

Ví dụ 7.2

a) Hàm ảnh của hàm f(t) = 1 là hàm:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-pt}dt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^a$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\frac{e^{-pa}-1}{-p} = \frac{1}{p} \qquad (\text{ với } \operatorname{Re} p > 0)$$

b) Hàm ảnh của hàm $f(t) = e^{\alpha t}$ là hàm:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.e^{\alpha t}dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{(\alpha-p)t}dt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p}\right]_0^a$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\frac{e^{(\alpha-p)a}-1}{\alpha-p} = \frac{1}{p-\alpha} \qquad (\text{ với } \operatorname{Re} p > \alpha)$$

c) Hàm ảnh của hàm f(t) = cost là hàm:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.\cos t dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-pt}\cos t dt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{-pt}(\sin t - p\cos t)}{1+p^2}\right]_0^a$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{e^{-pa}(\sin a - p\cos a)+p}{1+p^2}\right] = \frac{p}{1+p^2} \quad (\text{ với } \operatorname{Re} p > 0)$$

d) Tương tự hàm ảnh của hàm f(t) = sint là hàm:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.\sin t dt = \frac{1}{1+p^2} \quad (\text{ với } \operatorname{Re} p > 0)$$ ◆

3. Định lý 7.1 Nếu $f(t)$ hàm gốc với chỉ số tăng s_0 thì hàm ảnh F(p) sẽ hội tụ trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Re}(p) = s > s_0$, và là hàm giải tích (có đạo hàm) trong miền đó.

4- Định lý 7.2 (điều kiện cần của hàm ảnh)

Nếu F(p) là hàm ảnh của hàm f(t) với chỉ số tăng s_0 thì $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Ví dụ 7.3 Cho hàm $F(p) = \dfrac{p^2-1}{p^2+1}$. Hỏi có tồn tại hàm gốc f(t) sao cho F(p)= $\mathscr{L}$[f(t)] hay không?

Giải

Vì $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p^2-1}{p^2+1} = 1 \neq 0$, nên không tồn tại hàm gốc f(t) sao cho F(p)= $\mathscr{L}$[f(t)] . ◆

5. Phép biến đổi Laplace

5.1- Phép biến đổi Laplace

Phép tương ứng

$$f(t) \to F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

được gọi là phép biến đổi Laplace hay toán tử Laplace.

Ký hiệu:

$\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$; $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$;

$f(t) \to F(p)$; $f(t) \risingdotseq F[p]$

5.2- Phép biến đổi Laplace ngược

Phép tương ứng ngược lại

$F(p) \to f(t)$ sao cho $\mathscr{L}$ [f(t)] = F(p) được gọi là phép biến đổi Laplace ngược .

Ký hiệu: $\mathscr{L}^{-1}$[F(p)] = f(t) ; $\mathscr{L}^{-1}$\{ F(p)\} = f(t); $F(p) \to f(t)$, $F(p) \fallingdotseq f(t)$

Nhận xét Mỗi biến đổi Laplace luôn có biến đổi Laplace ngược tương ứng và ngược lại.

Ví du 7.4 (xem lại ví dụ 7.2)

a) $\mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{p}$; $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p}\right] = 1$ (với Rep > 0)

b) $\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \dfrac{1}{p-\alpha}$; $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p-\alpha}\right] = e^{\alpha t}$ (với Rep > α)

c) $\mathscr{L}[\cos t] = \dfrac{p}{1+p^2}$; $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{1+p^2}\right] = \cos t$ (với Rep > 0)

d) $\mathscr{L}[\sin t] = \dfrac{1}{1+p^2}$; $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{1+p^2}\right] = \sin t$ (với Rep > 0)

e) $\mathscr{L}[t] = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} t dt = \lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_0^a e^{-pt} t dt = \lim\limits_{a\to+\infty} \left[\dfrac{-e^{-pt}(pt+1)}{p^2} \right]_0^a$

$= \lim\limits_{a\to+\infty} \left[\dfrac{-e^{-pa}(pa+1)}{p^2} + \dfrac{1}{p^2} \right] = \dfrac{1}{p^2}$ (với Rep > 0). Do đó $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2}\right] = t$.

f) $\mathscr{L}[u(t-a)] = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} u(t-a) dt = \int\limits_a^{+\infty} e^{-pt} dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b e^{-pt} dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \left[\dfrac{e^{-pt}}{-p} \right]_a^b$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{e^{-pb} - e^{-pa}}{-p} = \dfrac{e^{-pa}}{p}$ (với Rep > 0) ◆

5.3- Định lý Mellin Giả sử $F(p)$ là hàm ảnh của hàm gốc $f(t)$ với chỉ số tăng s_o. Khi đó tại mọi điểm t mà hàm $f(t)$ liên tục ta có

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p) dp$$

ở đây tích phân được lấy theo đường thẳng tùy ý $\operatorname{Re} p = a > s_o$.

6 - Các tính chất cơ bản của phép biến đổi laplace

6 .1 Tính chất tuyến tính

Nếu $\mathscr{L}[f(t)] = F(p), \mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ và α, β là các số phức

thì $\mathscr{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$, $\mathscr{L}^{-1}[\alpha F(p) + \beta G(p)] = \alpha f(t) + \beta g(t)$

Chứng minh

$\mathscr{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + \beta \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt$

$= \alpha \mathscr{L}[f(t)] + \beta \mathscr{L}[g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$. ■

Ví dụ 7.5

a) $\mathscr{L}[5 - 3e^{2t} + 4\sin t] = 5\mathscr{L}[1] - 3\mathscr{L}[e^{2t}] + 4\mathscr{L}[\sin t] = \dfrac{5}{p} - \dfrac{3}{p-2} + 4\dfrac{1}{1+p^2}$

b) $\mathscr{L}[\operatorname{sh} wt] = \mathscr{L}\left[\dfrac{e^{wt} - e^{-wt}}{2}\right] = \dfrac{1}{2}(\mathscr{L}[e^{wt}] - \mathscr{L}[e^{-wt}]) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-w} - \dfrac{1}{p+w}\right)$

$= \dfrac{w}{p^2 - w^2}$, với Rep > | w| .

c) Tương tự $\mathscr{L}[\operatorname{ch} wt] = \dfrac{p}{p^2 - w^2}$, với Rep > | w| .

d) Ảnh của hàm lọc : $\mathscr{L}[u_{ab}(t)] = \mathscr{L}[u(t-a)] - \mathscr{L}[u(t-b)] = \dfrac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p}$. ◆

6 .2 Tính chất đồng dạng (thay đổi thang đo)

Nếu $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$ và $\alpha > 0$ thì $\mathscr{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$, $\mathscr{L}^{-1}[F(\alpha p)] = \frac{1}{\alpha}f(\frac{t}{\alpha})$

Chứng minh

$$\mathscr{L}[f(\alpha t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}u} f(u)du = \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha}).$$ ■

Ví dụ 7.6

a) Biết $\mathscr{L}[\sin t] = \dfrac{1}{p^2+1}$. Khi đó $\mathscr{L}[\sin wt] = \dfrac{1}{w}\left(\dfrac{1}{1+\left(\frac{p}{w}\right)^2}\right) = \dfrac{w}{p^2+w^2}$

b) Biết $\mathscr{L}[\cos t] = \dfrac{p}{p^2+1}$. Khi đó $\mathscr{L}[\cos wt] = \dfrac{1}{w}\left(\dfrac{\frac{p}{w}}{1+\left(\frac{p}{w}\right)^2}\right) = \dfrac{p}{p^2+w^2}$ ◆

6 .3 Tính chất dịch chuyển gốc

Nếu $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$ và $a > 0$ thì $\mathscr{L}[u(t-a)f(t-a)] = e^{-pa}F(p)$;

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-pa}F(p)] = u(t-a)f(t-a).$$

Chú ý : $u(t-a) = \begin{cases} 0 & khi\ \ t < a \\ 1 & khi\ \ t > a \end{cases}$

Chứng minh

$$\mathscr{L}[u(t-a)f(t-a)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)u(t-a)dt = \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+a)} f(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-pa}e^{-pu} f(u)du \qquad (\text{đặt } u = t - a)$$

$$= e^{-pa}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-pa}F(p).$$ ■

Ví dụ 7.7

a) Biết $\mathscr{L}[\sin wt] = \dfrac{w}{p^2+w^2}$. Khi đó $\mathscr{L}[u(t\text{-}2)\sin(w(t\text{-}2))] = e^{-2p}\dfrac{w}{p^2+w^2}$.

b) Biết $\mathscr{L}[t] = \dfrac{1}{p^2}$. Khi đó $\mathscr{L}^{-1}[\, e^{-p}\dfrac{1}{p^2}] = u(t\text{-}1)(t\text{-}1)$. ◆

6.4-Tính chất dịch chuyển ảnh

Nếu $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, f(t) có chỉ số tăng s_o, a là số phức

thì $\mathscr{L}\left[e^{at}\ f(t)\right] = F(p\text{-}a)$, $\mathscr{L}^{-1}[F(p-a)] = e^{at}\ f(t)$, với Re(p-a) > s_o.

Chứng minh

$$\mathscr{L}\left[e^{at}\ f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\ e^{at} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\ f(t)dt\ = F(p\text{-}a)\ ,\ \text{với Re(p-a)} > s_o.$$ ■

Ví dụ 7.8

a) Biết $\mathscr{L}[t] = \dfrac{1}{p^2}$. Khi đó $\mathscr{L}[e^{\alpha t}t] = \dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$.

b) Biết $\mathscr{L}[\sin wt] = \dfrac{w}{p^2+w^2}$. Khi đó $\mathscr{L}[\, e^{\alpha t}\sin wt] = \dfrac{w}{(p-\alpha)^2+w^2}$.

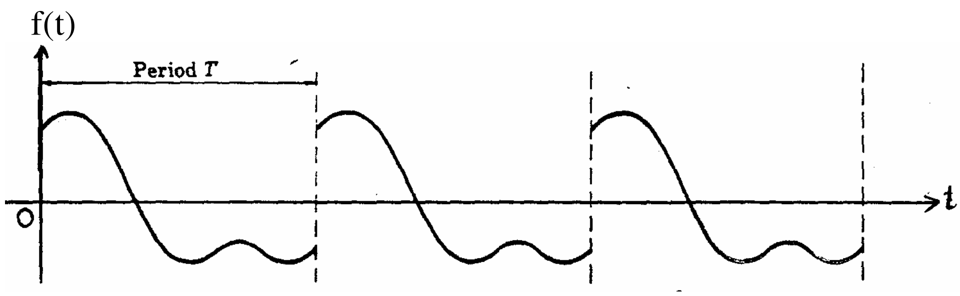
c) Biết $\mathscr{L}[\cos wt] = \dfrac{p}{p^2+w^2}$. Khi đó $\mathscr{L}[\, e^{\alpha t}\cos wt] = \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+w^2}$.

d) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p+4}{p^2-4p+13}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p-2}{(p-2)^2+3^2} + 2.\dfrac{3}{(p-2)^2+3^2}\right] = e^{2t}\cos 3t + 2e^{2t}\sin 3t$.

◆

6.5 Ảnh của hàm gốc tuần hoàn

Đồ thị hàm tuần hoàn f(t) được biểu diễn trong hình 7.4.



Hình 7.4

Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ T thì ảnh của nó là

$$F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$$

Chứng minh

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-pt} f(t)dt + \ldots\ldots$$

Trong các tích phân sau ta lần lượt đổi biến t = u+T, t = u + 2T..... , ta được

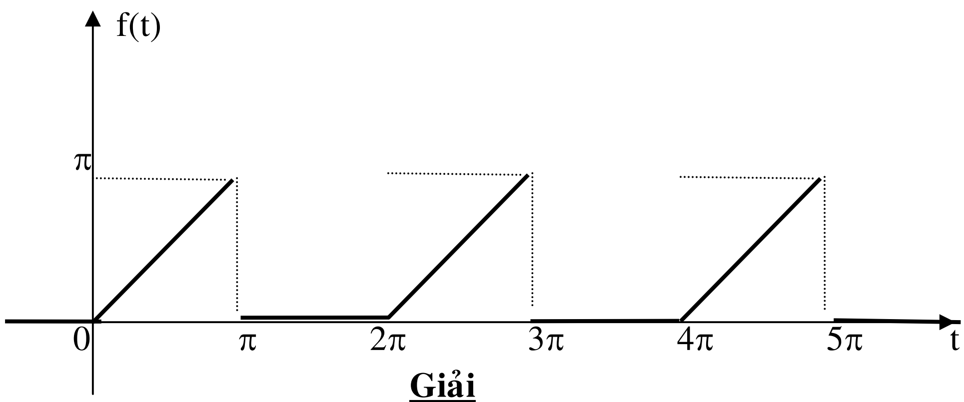
$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-PT}\int_0^T e^{-pu} f(u)du + e^{-2PT}\int_0^T e^{-pu} f(u)du + \ldots.$$

$$= \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-PT}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-2PT}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \ldots$$

$$= (1 + e^{-PT} + e^{-2PT} + \ldots\ldots\ldots)\int_0^T e^{-pt} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt. \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 7.9

Tìm ảnh của hàm gốc f(t) = $\begin{cases} t \text{ nếu } 0 \le t < \pi \\ 0 \text{ nếu } \pi < t < 2\pi \end{cases}$, f(t) tuần hoàn chu kỳ là 2π.



Giải

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\, tdt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left[\frac{-e^{-pt}(pt+1)}{p^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p\pi}(p\pi+1)}{p^2}\right) \qquad \blacklozenge$$

6.6.Tính chất đạo hàm hàm gốc

Nếu hàm gốc f(t) có đạo hàm đến cấp n và các đạo hàm cũng là hàm gốc thì:

$\mathscr{L}$[f'(t)] = pF(p) - f(0)

$\mathscr{L}$[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)

$\mathscr{L}$[$f^{(n)}$(t)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - .... - $f^{(n-1)}$(0)

Trong đó F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] .

Chứng minh

Áp dụng tích phân từng phần, ta có

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = pF(p) - f(0).$$

$\mathscr{L}$[f''(t)] = p $\mathscr{L}$[f'(t)] - f'(0) = p[pF(p) – f(0)]-f'(0) = p^2F(p) – pf(0) – f'(0) ■

Ví dụ 7.10 Giải phương trình vi phân: $y'' - y = t, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Đặt $Y = Y(P) = \mathscr{L}[y]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được:

$$P^2Y - Py(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{P^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(P^2 - 1) = P + 1 + \frac{1}{P^2} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{P-1} + \frac{1}{P^2 - 1} - \frac{1}{p^2}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế:

$$y = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{P-1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{P^2-1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{P^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow y = e^t + sht - t.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $y = e^t + sht - t$. ◆

6.7. Tính chất đạo hàm hàm ảnh (nhân cho t)

Nếu F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] và Re(p) > s_0

thì $\mathscr{L}$[t f(t)] = -F'(p) , $\mathscr{L}$[t^2f(t)]= F''(p).......$\mathscr{L}$[t^nf(t)]= $(-1)^n$ $F^{(n)}$(p) , Re(p) > s_0.

Ví dụ 7.11 Tìm : a) $\mathscr{L}$[tsinwt] b) $\mathscr{L}$[t^n]

a) Ta có $\mathscr{L}[\sin wt] = \dfrac{w}{p^2 + w^2} \Rightarrow \mathscr{L}[t\sin wt] = -\left(\dfrac{w}{p^2 + w^2}\right)' = \dfrac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}$

b) $\mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{p} \Rightarrow \mathscr{L}[t^n] = \mathscr{L}[t^n.1] = (-1)^n\left(\dfrac{1}{p}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ ◆

6.8. Tính chất tích phân hàm gốc

Nếu $\begin{cases} \mathscr{L}[f(t)] = F(p) \\ Re(p) > s_0 \end{cases}$, thì $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

6.9. Tính chất tích phân hàm ảnh (chia cho t)

Nếu $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, $Re(p) > s_0$ và tích phân $\int_p^{\infty} F(u)\,du$ hội tụ trong nửa mặt phẳng

$Re(p) > s_1 > s_0$ thì $\int_p^{\infty} F(u)du = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$, $Rep > s_1 > s_0$

Ví dụ 7.12 Tìm : a) $\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$ b) $\mathscr{L}\left[\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right]$

Giải

a) Ta có $\mathscr{L}[\sin t] = \dfrac{1}{p^2+1} \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right] = \int_p^{\infty} \dfrac{1}{u^2+1} du = \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}p$

b) Theo tính chất tích phân hàm gốc $\mathscr{L}\left[\int_0^t \dfrac{\sin u}{u} du\right] = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}p\right)$ ◆

Ví dụ 7.13 Tìm ảnh của hàm gốc: $f(t) = u(t-\pi)\cos(t-\pi) + 5t^2 \sin t + \int_0^t e^{-2u}\cos 5u\,du$

Giải

Áp dụng tính chất tuyến tính, dịch chuyển gốc, đạo hàm ảnh, tích phân gốc

$$\mathscr{L}[f(t)] = e^{-p\pi}\frac{p}{p^2+1} + 5\left(\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right)' + \frac{1}{p}.\ \mathscr{L}[e^{-2t}\cos 5t]$$

$$= e^{-p\pi}\frac{p}{p^2+1} + 10\frac{1-3p^2}{(p^2+1)^3} + \frac{1}{p}.\frac{p+2}{(p+2)^2+25}$$

§2. TÍCH CHẬP VÀ ẢNH CỦA TÍCH CHẬP

1. Tích chập

✻ *Định nghĩa* Tích chập của hai hàm phức biến thực f(t) và g(t), $0 \le t < \infty$; ký hiệu là $f * g$ được định nghĩa bởi: $(f * g)(t) = \int_0^t f(u).g(t-u)du$.

Ví dụ 7.14

a) $1*t = \int_0^t (t-u)du = \frac{t^2}{2}$.

b) $e^t*1 = \int_0^t e^u du = e^t - 1$

c) $\sin t*1 = \int_0^t \sin u du = 1-\cos t$

d) $t*\sin t = \int_0^t (t-u)\sin u du = t\int_0^t \sin u du - \int_0^t u\sin u du = t(1-\cos t) - (\sin t - t\cos t)$

$= t - \sin t$ ◆

✻ Các tính chất

(i) Giao hoán: $f * g = g * f$

(ii) Kết hợp: $(f * g) * h = f * (g * h) = f*g*h$

(iii) Phân phối đối với phép cộng: $f * (g + h) = f * g + f * h$

(iv) $(kf)*g = k(f*g)$, với k là hằng số.

(v) $|f * g| \le |f| *|g|$

(vi) Nếu f(t) và g(t) liên tục trong $0 \le t < \infty$ thì $f * g$ cũng liên tục.

(vii) Nếu f(t) là hàm gốc với chỉ số tăng s_1 và g(t) là hàm gốc với chỉ số tăng s_2 thì $(f * g)(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng là $\max\{s_1 , s_2\}$.

2 - Ảnh của tích chập

2.1 - Định lý Borel

Nếu $\begin{cases} \mathscr{L}[f(t)] = F(p), \operatorname{Re}(p) > s_2 \\ \mathscr{L}[g(t)] = G(p), \operatorname{Re}(p) > s_1 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \mathscr{L}[f * g] = F(p).G(p), \operatorname{Re}(p) > \max\{s_1, s_2\} \\ \mathscr{L}^{-1}[F(p).G(p)] = f * g \end{cases}$

Ví dụ 7.15

a) Tìm ảnh của hàm gốc: $f(t) = u(t-\pi)\sin(t-\pi) + e^{-3t} *\sin 6t + \int_0^t e^{-2u} \cos 5u du$

b)Tìm ảnh của hàm gốc : $f(t) = 5 + t\,sh2t + e^{-2t}\cos 3t + \int_0^t e^{3u}\sin(t-u)du$.

c) Tìm gốc của hàm ảnh: $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$

Giải

a) Áp dụng tính chất tuyến tính, tính chất dịch chuyển gốc, định lý Borel, tính chất tích phân gốc

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{p^2+1}e^{-p\pi} + \mathscr{L}\left[e^{-3t}\right]\mathscr{L}[\sin 6t] + \frac{1}{p}\mathscr{L}\left[e^{-2t}\cos 5t\right]$$

$$= \frac{1}{p^2+1}e^{-p\pi} + \frac{1}{p+3}\cdot\frac{6}{p^2+36} + \frac{1}{p}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+25}$$

b) Áp dụng tích chập ta được: $f(t) = 5 + tsh2t + e^{-2t}\cos 3t + e^{3t} * \sin t$

Áp dụng tính chất tuyến tính, áp dụng bảng và định lý Borel ta được :

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{5}{P} + \frac{4P}{\left(P^2-4\right)^2} + \frac{P+2}{(P+2)^2+9} + \frac{1}{P-3}\cdot\frac{1}{P^2+1}$$

c) Áp dụng bảng và định lý Borel ta được :

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^3(p^2+1)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}.\frac{1}{p^2}.\frac{1}{(p^2+1)}\right] = 1 * t * \sin t = 1*(t*\sin t)$$

$$= 1*(t-\sin t) = 1*t - 1*\sin t = \frac{t^2}{2} - (1-\cos t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t \quad \text{(xem lại ví dụ 7.13)}$$

◆

Ví dụ 7.16

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân sau

$$y(t) = 12e^{3t} + 2\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$$

b) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân sau

$$y(t) = 2 + \int_0^t \sin(t-u)y(u).du$$

Giải

a) Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại

$$y(t) = 12e^{3t} + 2y(t) * \cos 2t$$

Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$ biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được

$$Y = \frac{12}{p-3} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 2t] \Leftrightarrow Y = \frac{12}{p-3} + 2Y\frac{p}{p^2+4}$$

Giải phương trình với Y là ẩn ta được

$$Y = \frac{12(p^2+4)}{(p-3)((p-1)^2+3)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B(p-1)+\sqrt{3}C}{(p-1)^2+3}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{A}{p-3} + B\frac{p-1}{(p-1)^2+3} + C\frac{\sqrt{3}}{(p-1)^2+3}]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = Ae^{3t} + Be^{t}\cos\sqrt{3}t + Ce^{t}\sin\sqrt{3}t$$

Tìm A, B, C dựa vào đẳng thức

$$\frac{12(p^2+4)}{(p-3)((p-1)^2+3)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B(p-1)+\sqrt{3}C}{(p-1)^2+3}$$

Cho $p = 0$: $-4 = \frac{A}{-3} + \frac{\sqrt{3}C - B}{4}$

Cho $p = 1$: $-10 = \frac{A}{-2} + \frac{\sqrt{3}C}{3}$

$$A = \frac{12(3^2+4)}{((3-1)^2+3)} = \frac{157}{7},\ B = \frac{-97}{84},\ C = \frac{17\sqrt{3}}{14}$$

b) Phương trình tương đương với : y(t) = 2 + sint* y(t)

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$Y = \frac{2}{p} + \mathscr{L}[\text{sint}]\,\mathscr{L}[y(t)] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p} + \frac{Y}{p^2+1} \Leftrightarrow Y = \frac{2(p^2+1)}{p^3} = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^3}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được : $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = 2 + t^2$ ◆

2.2 . Công thức Duhamel

Nếu $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)]= G(p) thì

$$\mathscr{L}[f(0)g(t) + f' * g] = pF(p)\,G(p).$$

$$\mathscr{L}[g(0)f(t) + f * g'] = pF(p)\,G(p).$$

Ví dụ 7.17

Áp dụng công thức Duhamel tìm gốc của hàm $H(p) = \frac{pw}{(p-\alpha)(p^2+w^2)}$

Giải

Đặt $f(t) = \sin wt$, $\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[\sin wt] = \frac{w}{p^2+w^2}$, $f(0) = 0$, $f'(t) = w\cos wt$

$g(t) = e^{\alpha t}$, $\mathscr{L}[g(t)] = \mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha}$

$$H(p) = \frac{pw}{(p-\alpha)(p^2+w^2)} = p.\frac{w}{p^2+w^2}.\frac{1}{p-\alpha} = pF(p).G(p)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{1}[H(p)] = f(0)g(t) + f' * g = f' * g = w\int_0^t \cos wu.e^{\alpha(t-u)}du$$

$$= w e^{\alpha t}.\int_0^t \cos wu.e^{-\alpha u}du = \frac{w^2\sin wt + w\alpha(e^{\alpha t} - \cos wt)}{w^2+\alpha^2}.$$ ◆

3- Một số cách tìm hàm gốc

3.1 Tìm gốc nhờ bảng đối chiếu Gốc- Ảnh và các tính chất cơ bản.

Ví dụ 7.18 Tìm gốc của các hàm ảnh

a) $F(p) = \dfrac{p-2}{p^2-4p-5}$ b) $F(p) = \dfrac{p+8}{p^2+4p+8}$

Giải

a) $F(p) = \dfrac{p-2}{p^2-4p-5} = \dfrac{p-2}{(p-2)^2-3^2} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = e^{2t}ch3t.$

b) $F(p) = \dfrac{p+8}{p^2+4p+8} = \dfrac{p+2}{(p+2)^2+2^2} + 3.\dfrac{2}{(p+2)^2+2^2}$

$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = e^{-2t}\cos 2t + 3e^{-2t}\cos 2t$ ◆

3.2-Tìm gốc nhờ định lý Borel và công thức Duhamel

Nếu biết $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$ và $\mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ thì có thể tìm gốc của F(p)G(p), pF(p)G(p) nhờ tích chập.

Ví dụ 7.19 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2(p-1)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2}\right] \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p-1}\right] = t * e^t = e^t - t - 1$ ◆

3.3-Tìm gốc nhờ thặng dư

$$\boxed{f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, p_k]}$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ là tất cả các điểm bất thường cô lập của hàm F(p) và $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Ví dụ 7.20 Tìm gốc của các hàm ảnh sau:

a) $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^3(p-1)^2}$ b) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2}$

Giải

a) $\mathscr{L}^{1}[F(p)] = \mathscr{L}^{1}\left[\dfrac{p}{(p+1)^3(p-1)^2}\right]$

$$= \text{Res}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^3(p-1)^2},-1\right] + \text{Res}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^3(p-1)^2},1\right]$$

$$= \lim_{p\to -1}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right) + \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left(\frac{pe^{pt}}{(p+1)^3}\right) = \frac{1}{16}e^{-t}(1\text{-}2t^2) + \frac{1}{16}e^{t}(2t-1).$$

b) $\mathscr{L}^{1}[F(p)] = \mathscr{L}^{1}\left[\dfrac{1}{(p+i)^2(p-i)^2}\right]$

$$= \text{Res}\left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2},i\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^2(p-i)^2},-i\right]$$

$$= \lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^2}\right) + \lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^2}\right) = (-\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}) + (-\frac{1}{4}te^{-it} + \frac{1}{4}ie^{-it})$$

$$= -\frac{1}{4}t(e^{it} + e^{-it}) - \frac{1}{4}i(e^{it} - e^{-it}) = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t$$ ◆

3.4.Tìm gốc nhờ khai triển thành chuỗi

Khai triển Laurent của hàm F(p) từ đó suy ra hàm gốc f(t) dưới dạng chuỗi.

Ví dụ 7.21 Tìm gốc của các hàm : a) $F(p) = e^{\frac{1}{p}} - 1.$ b) $\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$

Giải

a) Ta có $F(p) = e^{\frac{1}{p}} - 1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^n}$

Suy ra $\mathscr{L}^{-1}\left[e^{\frac{1}{p}} - 1\right] = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!(n-1)!}$

b) $\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{np^n}$

$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left[\ln(1+\dfrac{1}{p})\right] = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{n(n-1)!}$ ◆

3.5.Tìm gốc nhờ khai triển thành phân thức đơn giản

<u>Ví dụ 7.22</u> Tìm gốc của các hàm ảnh sau:

a) $F(p) = \dfrac{2p^2 - 4}{(p+1)(p-2)(P-3)}$ b) $F(p) = \dfrac{4p^3 - 3p^2 + 10p - 16}{(p-1)(p-2)(P^2+4)}$

c) $F(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 3}{(P^2 + 2p + 2)(P^2 + 2p + 5)}$

<u>Giải</u>

a) Ta có $F(p) = \dfrac{2p^2 - 4}{(p+1)(p-2)(P-3)} = \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{C}{p-3}$

- Nhân hai vế cho (p+1) : $\dfrac{2p^2 - 4}{(p-2)(P-3)} = A + \dfrac{B(p+1)}{p-2} + \dfrac{C(p+1)}{p-3}$

Cho $p \to -1$: $A = \lim\limits_{p \to -1} \dfrac{2p^2 - 4}{(p-2)(P-3)} = \dfrac{-1}{6}$

- Nhân hai vế cho (p-2) : $\dfrac{2p^2 - 4}{(p+1)(P-3)} = \dfrac{A(p-2)}{p+1} + B + \dfrac{C(p-2)}{p-3}$

Cho $p \to 2$: $A = \lim\limits_{p \to 2} \dfrac{2p^2 - 4}{(p+1)(P-3)} = \dfrac{-4}{3}$

- Tương tự $C = \lim\limits_{p \to 3} \dfrac{2p^2 - 4}{(p+1)(P-2)} = \dfrac{7}{2}$

Ta được $F(p) = \dfrac{-1}{6} \cdot \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{1}{p-3}$

Suy ra $\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \dfrac{-1}{6} . e^{-t} - \dfrac{4}{3} . e^{2t} + \dfrac{7}{2} . e^{3t}$

b) Ta có $\dfrac{4p^3 - 3p^2 + 10p - 16}{(p-1)(p-2)(p^2+4)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p-2} + \dfrac{Cp + D}{p^2 + 4}$

Nhân hai vế cho (p-1) : $\dfrac{4p^3 - 3p^2 + 10p - 16}{(p-2)(P^2+4)} = A + \dfrac{B(p-1)}{p-2} + \dfrac{(Cp+D)(p-1)}{p^2+4}$ (*)

Cho $p \to 1$: $A = \lim\limits_{p \to 1} \dfrac{4p^3 - 3p^2 + 10p - 16}{(p-2)(P^2+4)} = 1$

Nhân hai vế cho (p-2) : $\dfrac{4p^3 - 3p^2 + 10p - 16}{(p-1)(P^2+4)} = \dfrac{A(p-2)}{p-1} + B + \dfrac{(Cp+D)(p-2)}{p^2+4}$

Cho p→ 2: A = $\lim\limits_{p\to 2}\dfrac{4p^3-3p^2+10p-16}{(p-1)(p^2+4)}= 3$

Thay vào (*) ta được : $\dfrac{4p^3-3p^2+10p-16}{(p-1)(p-2)(p^2+4)} = \dfrac{1}{p-1}+\dfrac{3}{p-2}+\dfrac{Cp+D}{p^2+4}$

Lần lượt cho p = 0 , p = 3 ta được hệ phương trình : $\begin{cases} -2=-1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{D}{4} \\ \dfrac{95}{26}=\dfrac{1}{2}+3+\dfrac{6C+D}{13} \end{cases}$

Giải hệ ta được C = 0, D = 2 . Suy ra F(p) = $\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{3}{p-2}+\dfrac{2}{p^2+4}$

Biến đổi Laplace ngược ta được : $\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = e^t + 3e^{2t} + \sin 2t$

c) F(p) = $\dfrac{p^2+2p+3}{(P^2+2p+2)(P^2+2p+5)} = \dfrac{p^2+2p+3}{[(P+1)^2+1][(P+1)^2+4]}$

$= \dfrac{A(p+1)+B}{(P+1)^2+1}+\dfrac{C(p+1)+D}{(P+1)^2+4}$

Lần lượt cho p = 0, p = -1, p= -2, p = 1 ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3}{10}=\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C+D}{5} \\ \dfrac{1}{2}=B+\dfrac{D}{4} \\ \dfrac{3}{10}=\dfrac{-A+B}{2}+\dfrac{-C+D}{5} \\ \dfrac{3}{20}=\dfrac{2A+B}{5}+\dfrac{2C+D}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{1}{3} \\ C=0 \\ D=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow F(p) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{(P+1)^2+1}+\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{(P+1)^2+4} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \dfrac{1}{3}e^{-t}\sin t + \dfrac{1}{3}e^{-t}\sin 2t$

◆

BIẾN ĐỔI LAPLACE – TÍNH CHẤT

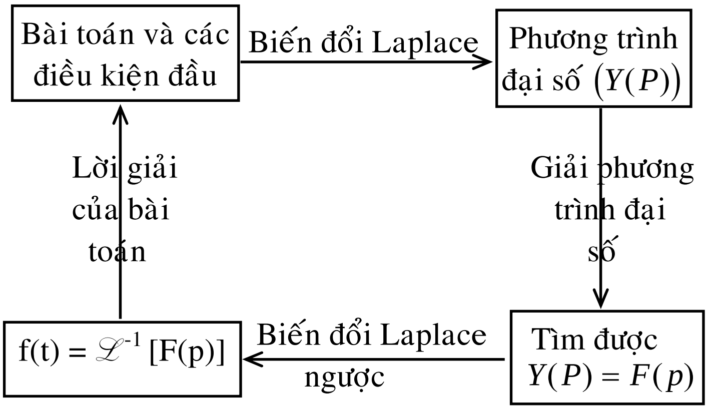
Công thức	Tên – Tính chất
$F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(P)]$	**Định nghĩa biến đổi Laplace** **biến đổi Laplace ngược**
$\mathscr{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathscr{L}[f(t)] + \beta \mathscr{L}[g(t)]$	**Tính chất tuyến tính**
Nếu $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$ và $\alpha > 0$ thì $\mathscr{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$	**Tính chất đồng dạng**
$\mathscr{L}[e^{at} f(t)] = F(p-a)$ $\mathscr{L}^{-1}[F(p-a)] = e^{at} f(t)$	**Tính chất dịch chuyển ảnh**
$\mathscr{L}[u(t-a) f(t-a)] = e^{-ap} F(p)$ $\mathscr{L}^{-1}[e^{-ap} F(p)] = u(t-a) f(t-a)$	**Tính chất dịch chuyển gốc**
$\mathscr{L}[f'(t)] = p \mathscr{L}[f(t)] - f(0)$ $\mathscr{L}[f''(t)] = p^2 \mathscr{L}[f(t)] - pf(0) - f'(0)$ $\vdots$ $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \mathscr{L}[f(t)] - p^{n-1}f(0) - \ldots\ldots - f^{(n-1)}(0)$	**Tính chất đạo hàm hàm gốc**
$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{p}\mathscr{L}[f(t)]$	**Tính chất tích phân hàm gốc**
$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$	**Ảnh của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ T**
$\mathscr{L}[t f(t)] = -F'(p)$, $\mathscr{L}[t^2 f(t)] = F''(p)\ldots\ldots$ $\ldots\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$	**Tính chất đạo hàm hàm ảnh (nhân t)**
$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(u)du$	**Tính chất tích phân hàm ảnh (chia t)**
$(f*g)(t) = \int_0^t f(u).g(t-u)du = \int_0^t f(t-u).g(u)du$ $\mathscr{L}[f*g] = \mathscr{L}[f(t)]\,\mathscr{L}[g(t)]$	**Tích chập- Ảnh của tích chập** **Định lý Borel**
$\mathscr{L}[f(0)g(t) + f'*g] = pF(p)\,G(p)$ $\mathscr{L}[g(0)f(t) + f*g'] = pF(p)\,G(p)$	**Công thức Duhamel**

BẢNG ĐỐI CHIẾU GỐC - ẢNH CƠ BẢN

STT	f(t)	F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)]	STT	f(t)	F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)]
01	1	$\frac{1}{p}$	11	$e^{\alpha t}$chwt	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-w^2}$
02	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	12	$e^{\alpha t}$shwt	$\frac{w}{(p-\alpha)^2-w^2}$
03	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	tsinwt	$\frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$
04	sinwt	$\frac{w}{p^2+w^2}$	14	tcoswt	$\frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$
05	coswt	$\frac{p}{p^2+w^2}$	15	tshwt	$\frac{2pw}{(p^2-w^2)^2}$
06	t^n $e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	16	tchwt	$\frac{p^2+w^2}{(p^2-w^2)^2}$
07	shwt	$\frac{w}{p^2-w^2}$	17	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
08	chwt	$\frac{p}{p^2-w^2}$	18	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\frac{p-b}{p-a}$
09	$e^{\alpha t}$sinwt	$\frac{w}{(p-a)^2+w^2}$	19	t $e^{\alpha t}$sinwt	$\frac{2w(p-\alpha)}{\left[(p-\alpha)^2+w^2\right]^2}$
10	$e^{\alpha t}$coswt	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+w^2}$	20	t $e^{\alpha t}$coswt	$\frac{(p-\alpha)^2-w^2}{\left[(p-\alpha)^2+w^2\right]^2}$

§3. ỨNG DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Sơ đồ ứng dụng của phép biến đổi Laplace



Nếu bài toán ban đầu là hệ phương trình vi phân hay tích phân thì sau khi biến đổi Laplace ta được hệ phương trình đại số. Giải hệ phương trình đại số đó rồi biến đổi Laplace ngược ta được kết quả.

1. Giải phương trình vi phân

<u>Ví dụ 7.23</u> Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' - 6y' + 25y = e^{-3t} + e^{2t}, \text{ với } y(0) = 0,\ y'(0) = 12$$

<u>Giải</u>

Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y - py(0) - y'(0) - 6(pY - y(0)) + 25Y = \mathscr{L}[e^{-3t} + e^{2t}]$$

$$\Leftrightarrow Y(p^2 - 6p + 25) = \frac{1}{p+3} + \frac{1}{p-2} + 12$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{2p+1}{(p-2)(p+3)[(p-3)^2+16]} + \frac{12}{p^2-6p+25}$$

$$= \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+3} + \frac{C(p-3)+4D}{(p-3)^2+16} + \frac{12}{(p-3)^2+16}$$

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p-2} + B\frac{1}{p+3} + C\frac{p-3}{(p-3)^2+16} + D\frac{4}{(p-3)^2+16}] + \mathscr{L}^{-1}[3\frac{4}{(p-3)^2+16}]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} + Ce^{3t}\cos 4t + De^{3t}\sin 4t + 3e^{3t}\sin 4t$$

Tìm A, B, C, D dựa vào đẳng thức:

$$\frac{2p+1}{(p-2)(p+3)[(p-3)^2+16]} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+3}+\frac{C(p-3)+4D}{(p-3)^2+16}$$

$$A=\frac{2\times 2+1}{(2+3)[(2-3)^2+16]}=\frac{1}{17}\ ,\quad B=\frac{2\times(-3)+1}{(-3-2)[(-3-3)^2+16]}=\frac{1}{52}$$

Từ (*) cho $p=0$ được: $\dfrac{-1}{6\times 25}=\dfrac{A}{-2}+\dfrac{B}{3}+\dfrac{-3C+4D}{25}$

Từ (*) cho $p=3$ được: $\dfrac{7}{96}=A+\dfrac{B}{6}+\dfrac{D}{4}$. Suy ra $C=\dfrac{-69}{884}$, $D=\dfrac{77}{1768}$

Ví dụ 7.24 Giải các phương trình vi phân sau :

a) $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

b) $y''+3y'+2y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, $f(t) = \begin{cases} e^t & , \text{ khi } 0 < t < 2 \\ 1 & , \text{ khi } t > 2 \end{cases}$

Giải

a) Đặt $Y = Y(P) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình và áp dụng tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y - py(0) - y'(0) + 2[pY - y(0)] + 5Y = \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\ Y = \frac{p^2+2p+3}{(p^2+2p+2)(p^2+2p+5)}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng kết quả *ví dụ 7.21c* ta được nghiệm phương trình là : $y(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t}\sin t + \dfrac{1}{3}e^{-t}\sin 2t$

b) $f(t) = e^t\begin{cases} 1, & 0 < t\langle 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases} + 1\begin{cases} 0, & 0 < t\langle 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases} = e^t[u(t) - u(t-2)] + u(t-2)$

$$= e^t - e^2.e^{(t-2)}u(t-2) + u(t-2)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{p-1} - e^2\cdot\frac{e^{-2P}}{p-1} + \frac{e^{-2P}}{p}$$

Đặt $Y = \mathscr{L}(y)$; biến đổi Laplace 2 vế phương trình ; áp dụng tính chất đạo hàm hàm gốc và tính chất dịch chuyển gốc ta được:

$$(p^2+3p+2)Y = \frac{1}{p-1} - e^2\cdot\frac{e^{-2P}}{p-1} + \frac{e^{-2P}}{p}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(p-1)(p+1)(p+2)} - \frac{e^2\cdot e^{-2p}}{(p-1)(p+1)(p+2)} + \frac{e^{-2p}}{p(p+1)(p+2)}$$

$$\Leftrightarrow Y=\left[\frac{1/6}{p-1}+\frac{-1/2}{p+1}+\frac{1/3}{p+2}\right]-e^{2}e^{-2p}\left[\frac{1/6}{p-1}+\frac{-1/2}{p+1}+\frac{1/3}{p+2}\right]+\left[\frac{1/2}{p}+\frac{-1}{p+1}+\frac{1/2}{p+2}\right]e^{-2p}$$

Biến đổi ngược hai vế và áp dụng tính chất dịch chuyển gốc ta được

$$y=\frac{1}{6}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}-$$

$$-\left(e^{2}\left[\frac{1}{6}e^{t-2}-\frac{1}{2}e^{-(t-2)}+\frac{1}{3}e^{-2(t-2)}\right]+\left[\frac{1}{2}-e^{-(t-2)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right]\right)u(t-2)$$

Ví dụ 7.25

Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 6y' + 20y = 50 + e^{-6t} \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Giải

Đặt $Y=Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y-py(0)-y'(0)+6\big(pY-y(0)\big)+20Y = \mathscr{L}\left[50+e^{-6t}\right]$$

$$\Leftrightarrow Y(p^2+6p+20)=\frac{50}{p}+\frac{1}{p+6}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{51p+300}{p(p+6)[(p+3)^2+11]} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p+6}+\frac{C(p+3)+D\sqrt{11}}{(p+3)^2+11}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t)= \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p}+B\frac{1}{p+6}+C\frac{p+3}{(p+3)^2+11}+D\frac{\sqrt{11}}{(p+3)^2+11}]$$

$$\Leftrightarrow y(t)= A+Be^{-6t}+Ce^{-3t}\cos\sqrt{11}t+De^{-3t}\sin\sqrt{11}t$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)= \lim_{t\to+\infty} A+B\lim_{t\to+\infty} e^{-6t}+\lim_{t\to+\infty}[\, e^{-3t}(C\cos\sqrt{11}t+D\sin\sqrt{11}t)] = A$$

Sau khoảng thời gian t đủ lớn thì $y(t)\approx A=\frac{5}{2}$ (tính A bên dưới)

Tìm A,B,C,D dựa vào đẳng thức:

$$\frac{51p+300}{p(p+6)[(p+3)^2+11]} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p+6}+\frac{C(p+3)+D\sqrt{11}}{(p+3)^2+11}$$

$$A= \frac{51\times 0+300}{(0+6)[(0+3)^2+11]}=\frac{5}{2},\quad B=\frac{51\times(-6)+300}{-6[(-6+3)^2+11]}=\frac{1}{20}$$

Cho $p=-3$: $-\dfrac{147}{99}=\dfrac{A}{-3}+\dfrac{B}{3}+\dfrac{D}{\sqrt{11}}$

Cho $p=-2$: $-\dfrac{99}{48}=\dfrac{A}{-2}+\dfrac{B}{4}+\dfrac{C+D\sqrt{11}}{12}$

Suy ra $C=-\dfrac{51}{20}$, $D=-\dfrac{147}{220}\sqrt{11}$

<u>Ví dụ 7.26</u> Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 4y' + 13y = 36 + e^{-5t} \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

<u>Giải</u>

Đặt $Y=Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y - py(0) - y'(0) + 4(pY - y(0)) + 13Y = \mathscr{L}[36 + e^{-5t}]$$

$$\Leftrightarrow Y(p^2+4p+13)=\frac{36}{p}+\frac{1}{p+5}$$

$$\Leftrightarrow Y=\frac{37p+180}{p(p+5)[(p+2)^2+9]} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p+5}+\frac{C(p+2)+3D}{(p+2)^2+9}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t)= \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p}+B\frac{1}{p+5}+C\frac{p+2}{(p+2)^2+9}+D\frac{3}{(p+2)^2+9}]$$

$$\Leftrightarrow y(t)= A+Be^{-5t}+Ce^{-2t}\cos 3t+De^{-2t}\sin 3t$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} A + B\lim_{t\to+\infty} e^{-5t} + \lim_{t\to+\infty}[\, e^{-2t}(C\cos 3t + D\sin 3t)] = A$$

Sau khoảng thời gian t đủ lớn thì $y(t)\approx A=\dfrac{36}{13}$ (tính A bên dưới)

Tìm A,B,C,D dựa vào đẳng thức:

$$\frac{37p+180}{p(p+5)[(p+2)^2+9]} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p+5}+\frac{C(p+2)+3D}{(p+2)^2+9}$$

$$A=\frac{37\times 0+180}{(0+5)[(0+2)^2+9]}=\frac{36}{13},\quad B=\frac{37\times(-5)+180}{-5[(-5+2)^2+9]}=\frac{1}{18}$$

Cho $p=-2$: $-\dfrac{53}{27}=\dfrac{A}{-2}+\dfrac{B}{3}+\dfrac{D}{3}$

Cho $p=1$: $\dfrac{217}{108}=A+\dfrac{B}{6}+\dfrac{3C+3D}{18}$

Suy ra $C=-\dfrac{661}{234}$, $D=-\dfrac{419}{234}$

2. Giải hệ phương trình vi phân

Ví dụ 7.27 Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'+3y=3 \\ x+y'-2y=e^{-5t} \end{cases} \quad \text{với điều kiện } x(0)=0 \text{ và } y(0)=0$$

Giải

Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x']+3\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[3] \\ \mathscr{L}[x]+\mathscr{L}[y']-2\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}\left[e^{-5t}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX+3Y=\dfrac{3}{p} \\ X+(p-2)Y=\dfrac{1}{p+5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{3p^2+6p-30}{p(p+1)(p-3)(p+5)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p-3}+\dfrac{D}{p+5} \\ Y=\dfrac{p^2-3p-15}{p(p+1)(p-3)(p+5)}=\dfrac{E}{p}+\dfrac{F}{p+1}+\dfrac{G}{p-3}+\dfrac{H}{p+5} \end{cases}$$

Biến đổi ngược hai vế ta được: $\begin{cases} x=\mathscr{L}^{-1}[X] \\ y=\mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p}+B\dfrac{1}{p+1}+C\dfrac{1}{p-3}+D\dfrac{1}{p+5}] \\ y=\mathscr{L}^{-1}[E\dfrac{1}{p}+F\dfrac{1}{p+1}+G\dfrac{1}{p-3}+H\dfrac{1}{p+5}] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=A+Be^{-t}+Ce^{3t}+De^{-5t} \\ y=E+Fe^{-t}+Ge^{3t}+He^{-5t} \end{cases}$$

- Tìm A,B,C,D dựa vào: $\dfrac{3p^2+6p-30}{p(p+1)(p-3)(p+5)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p-3}+\dfrac{D}{p+5}$

$$A=\frac{3\times 0^2+6\times 0-30}{(0+1)(0-3)(0+5)}=2,\ B=\frac{3(-1)^2+6\times(-1)-30}{-1(-1-3)(-1+5)}=\frac{-33}{16},$$

$$C=\frac{3\times 3^2+6\times 3-30}{3(3+1)(3+5)}=\frac{5}{32},\ D=\frac{3\times(-5)^2+6\times(-5)-30}{-5(-5+1)(-5-3)}=\frac{-3}{32}$$

- Tìm E,F,G,H dựa vào: $\dfrac{p^2-3p-15}{p(p+1)(p-3)(p+5)}=\dfrac{E}{p}+\dfrac{F}{p+1}+\dfrac{G}{p-3}+\dfrac{H}{p+5}$

$$E=\frac{0^2-3\times 0-15}{(0+1)(0-3)(0+5)}=1 \qquad F=\frac{(-1)^2-3\times(-1)-15}{-1(-1-3)(-1+5)}=-\frac{11}{16}$$

$$G=\frac{3^2-3\times 3-15}{3(3+1)(3+5)}=-\frac{5}{24},\ H=\frac{(-5)^2-3\times(-5)-15}{-5(-5+1)(-5-3)}=-\frac{5}{32}$$

Ví dụ 7.28 Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'+3y=\sin t \\ x+y'+2y=3e^t \end{cases}$$, với điều kiện x(0) =0, y(0) = 0

Giải

Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x']+3\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[\sin t] \\ \mathscr{L}[x]+\mathscr{L}[y']+2\mathscr{L}[y]=3\mathscr{L}[e^t] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX+3Y=\dfrac{1}{p^2+1} \\ X+(p+2)Y=\dfrac{3}{p-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{-8p^2+p-11}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\dfrac{A(p-1)+B}{(p-1)^2}+\dfrac{C}{p+3}+\dfrac{Dp+E}{p^2+1} \\ Y=\dfrac{3p^3+2p+1}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\dfrac{A'(p-1)+B'}{(p-1)^2}+\dfrac{C'}{p+3}+\dfrac{D'p+E'}{p^2+1} \end{cases}$$

Biến đổi ngược hai vế ta được:

$$\begin{cases} x=\mathscr{L}^{-1}[X] \\ y=\mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p-1}+B\dfrac{1}{(p-1)^2}+C\dfrac{1}{p+3}+D\dfrac{p}{p^2+1}+E\dfrac{1}{p^2+1}] \\ y=\mathscr{L}^{-1}[A'\dfrac{1}{p-1}+B'\dfrac{1}{(p-1)^2}+C'\dfrac{1}{p+3}+D'\dfrac{p}{p^2+1}+E'\dfrac{1}{p^2+1}] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=Ae^t+Bte^t+Ce^{-3t}+D\cos t+E\sin t \\ y=A'e^t+B'te^t+C'e^{-3t}+D'\cos t+E'\sin t \end{cases}$$

♦ Tìm A,B,C,D,E dựa vào

$$\frac{-8p^2+p-11}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\frac{A(p-1)+B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p+3}+\frac{Dp+E}{p^2+1}$$

$$B=\frac{-8\times1^2+1-11}{(1+3)(1^2+1)}=\frac{-9}{4},\ C=\frac{-8\times(-3)^2-3-11}{(-3-1)^2(9+1)}=-\frac{43}{80}$$

$$\begin{cases} Cho\ p=0\ \ :\ \ \dfrac{-11}{3}=-A+B+\dfrac{C}{3}+E \\ Cho\ p=2\ \ :\ \ \dfrac{-41}{25}=A+B+\dfrac{C}{5}+\dfrac{2D+E}{5} \\ Cho\ p=-2\ \ :\ \ -1=\dfrac{-3A+B}{9}+C+\dfrac{E-2D}{5} \end{cases}$$

Thay $B=\dfrac{-9}{4}$, $C=-\dfrac{43}{80}$ vào hệ trên và sử dụng máy tính casio giải được $A=\dfrac{15}{16}$, $D=\dfrac{-2}{5}$, $E=\dfrac{-3}{10}$

♦ Tương tự, chúng ta tìm A',B',C',D',E' dựa vào

$$\frac{3p^3+2p+1}{(p-1)^2(p+3)(p^2+1)}=\frac{A'(p-1)+B'}{(p-1)^2}+\frac{C'}{p+3}+\frac{D'p+E'}{p^2+1}$$

$$B'=\frac{3\times1^3+2\times1+1}{(1+3)(1^2+1)}=\frac{3}{4},\ C'=\frac{3\times(-3)^3+2\times(-3)+1}{(-3-1)((-3)^2+1)}=\frac{43}{20}$$

$$\begin{cases} Cho\ p=0 & : \dfrac{1}{3} = -A'+B'+\dfrac{C'}{3}+E' \\ Cho\ p=2 & : \dfrac{29}{25} = A'+B'+\dfrac{C'}{5}+\dfrac{2D'+E'}{5} \\ Cho\ p=-2 & : \dfrac{-3}{5} = \dfrac{-3A'+B'}{9}+C'+\dfrac{E'-2D'}{5} \end{cases}$$

Thay $B'=\frac{3}{4}$, $C'=\frac{43}{20}$ vào hệ trên và sử dụng máy tính casio giải được $A'=\frac{15}{16}$, $D'=$, $E'=$

Ví dụ 7.29

a) Giải hệ phương trình vi phân : $\begin{cases} x'-2y=4 \\ y'+2x=3t \end{cases}$, với điều kiện x(0) = 3, y(0) = 2

b) Giải hệ phương trình vi phân : $\begin{cases} x'=-3y \\ y'+x+2y=0 \end{cases}$, với điều kiện x(0) = 1, y(0) = 2 .

Giải

a) Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được :

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x']-2\mathscr{L}[y]=4\mathscr{L}[1] \\ \mathscr{L}[y']+2\mathscr{L}[x]=3\mathscr{L}[t] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX-3-2Y=\dfrac{4}{p} \\ pY-2+2X=\dfrac{3}{p^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX-2Y=3+\dfrac{4}{p} \\ 2X+pY=2+\dfrac{3}{p^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{8}{p^2+4}+\dfrac{3P}{p^2+4}+\dfrac{6}{p^2(p^2+4)} \\ Y=\dfrac{-6}{p^2+4}+\dfrac{2P}{p^2+4}-\dfrac{5}{p(p^2+4)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{3p}{p^2+4}+\dfrac{6}{p^2}-\dfrac{16}{p^2+4} \\ Y=\dfrac{-6}{p^2+4}+\dfrac{13}{4}\dfrac{P}{p^2+4}-\dfrac{5}{4p} \end{cases}.$$

Biến đổi ngược hai vế ta được nghiệm : $\begin{cases} x=3\cos 2t+6t-8\sin 2t \\ y=-3\sin 2t+\dfrac{13}{4}\cos 2t-\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

b) Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được :

$$\begin{cases} Xp+3Y=1 \\ X+(p+2)Y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{p-4}{(p-1)(p+3)}=\dfrac{-3/4}{p-1}+\dfrac{7/4}{p+3} \\ Y=\dfrac{2p-2}{p^2+2p-3}=\dfrac{1/4}{p-1}+\dfrac{7/4}{p+3} \end{cases}$$

Biến đổi ngược hai vế ta được nghiệm: $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{4}e^{t}+\dfrac{7}{4}e^{-3t} \\ y=\dfrac{1}{4}e^{t}+\dfrac{7}{4}e^{-3t} \end{cases}$ ◆

3. Giải phương trình tích phân Volterra

Phương trình sau đây gọi là phương trình tích phân Volterra loại 2

$$\text{y(t)} = \text{f(t)} + \lambda \int_0^t k(t-u)y(u)du \quad , \text{ y(t) là hàm cần tìm, } \lambda = \text{const}$$

<u>Giải</u>

Áp dụng tích chập , phương trình được viết lại : y(t) = f(t) + k(t) * y(t)

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}[y]$, F(p) = $\mathscr{L}[f(t)]$, K(p) = $\mathscr{L}[k(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình và áp dụng định lý Borel ta được :

$$Y = F(p) + \lambda K(p)Y \iff Y = \frac{F(p)}{1-\lambda K(P)} \Rightarrow y = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(p)}{1-\lambda K(p)}\right] \qquad \blacksquare$$

<u>Ví dụ 7.30</u> Áp dụng phép biến đổi Laplace giải các phương trình tích phân:

a) $y(t) = t^2 + \int_0^t y(u)\sin(t-u)du$

b) $y(t) = e^{5t} + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$

c) $y(t) = \sin 2t + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$

<u>Giải</u>

a) Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại dưới dạng: $y(t) = t^2 + y(t) * \sin t$

Đặt $Y = Y(P) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình và áp dụng định lý Borel ta được: $Y = \frac{2}{p^3} + Y\cdot\frac{1}{p^2+1} \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5}$

Biến đổi ngược hai vế: $y = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^3}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^5}\right] = t^2 + \frac{t^4}{12}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $y(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}$

b) Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại

$$y(t) = e^{5t} + 2y(t) * \cos t$$

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p-5} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-5} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$

Giải phương trình với Y là ẩn ta được

$$Y = \frac{p^2+1}{(p-5)(p-1)^2} = \frac{A}{p-5} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{A}{p-5} + B\frac{1}{p-1} + C\frac{1}{(p-1)^2}]$$

$\Leftrightarrow\ y(t) = Ae^{5t} + Be^{t} + Cte^{t}$

Tìm A, B, C dựa vào đẳng thức

$$\frac{p^2+1}{(p-5)(p-1)^2} = \frac{A}{p-5} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2}$$

$A = \frac{13}{8}$, $C = \frac{-1}{2}$, $B = \frac{-5}{8}$

c) Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại: $y(t) = \sin 2t + 2y(t) * \cos t$

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được

$$Y = \frac{2}{p^2+4} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p^2+4} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$

Giải phương trình với Y là ẩn ta được

$$Y = \frac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p^2+4)} = \frac{A(p-1)+B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+2D}{p^2+4}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}\left[A\frac{1}{p-1} + B\frac{1}{(p-1)^2} + C\frac{p}{p^2+4} + D\frac{2}{p^2+4}\right]$$

$\Leftrightarrow\ y(t) = Ae^{t} + Bte^{t} + C\cos 2t + D\sin 2t$

Tìm A, B, C dựa vào đẳng thức

$$\frac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p^2+4)} = \frac{A(p-1)+B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+2D}{p^2+4}$$

$A =\ \ $, $B = \frac{4}{5}$, $\quad C = -\ \ $, $\quad D = -$

4. Giải phương trình vi tích phân

Ví dụ 7.31 Giải phương trình:

$$y'' + y = \sin t + \int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du \text{ , với } y(0)= 0,\ y'(0) = 1.$$

Giải

Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại dưới dạng:

$$y'' + y = \sin t + y(t) * \sin t$$

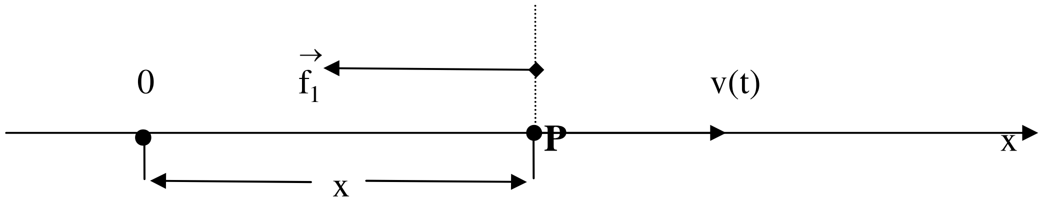
Đặt $Y = Y(P) = L[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình , áp dụng tính chất đạo hàm hàm gốc và định lý Borel ta được : $P^2Y - 1 + Y = \frac{1}{p^2+1} + \frac{Y}{p^2+1}$

Giải phương trình với Y là ẩn số ta được : $Y = \frac{1}{p^2}$

Biến đổi ngược hai vế ta được nghiệm phương trình là : y = t. ◆

5. Ứng dụng vào cơ học

- Một chất điểm P có khối lượng m chuyển động dọc trục 0x với hoành độ x(t) ; và bị hút về gốc 0 bởi một lực hướng tâm $f_1(t) = kx(t)$.



Hình 7.5

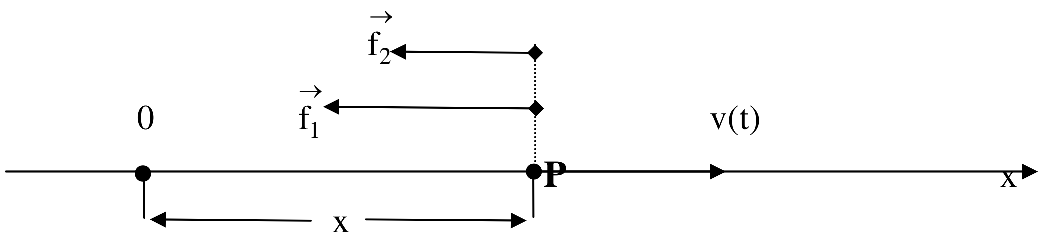
Theo định luật Newton ta có phương trình chuyển động của chất điểm là

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f_1(t) \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + f_1(t) = 0 \Leftrightarrow mx'' + k\,x = 0$$

- Nếu có thêm một lực tắt dần tỷ lệ với vận tốc tức thời của chất điểm là $f_2(t) = \alpha v(t)$ tác dụng vào chất điểm thì theo định luật Newton phương trình chuyển động của chất điểm là

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f_1(t) - f_2(t) \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + f_1(t) + f_2(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow mx'' + k\,x + \alpha v(t) = 0 \Leftrightarrow mx'' + \alpha x'(t) + k\,x = 0$$



Hình 7.6

- Bây giờ, nếu có thêm ngoại lực f(t) tác dụng vào chất điểm thì theo định luật Newton phương trình chuyển động của chất điểm là

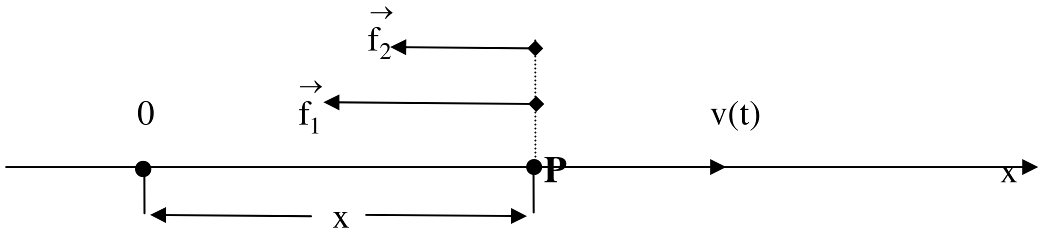
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f_1(t) - f_2(t) + f(t) \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + f_1(t) + f_2(t) = f(t)$$

$$\Leftrightarrow mx'' + k\,x + \alpha v(t) = f(t) \quad \Leftrightarrow mx'' + \alpha x'(t) + k\,x = f(t)$$

<u>Ví dụ 7.32</u> Một chất điểm P có khối lượng m = 2 gram chuyển động dọc trục 0x với hoành độ x(t) ; và bị hút về gốc 0 bởi một lực hướng tâm $f_1(t) = -8x(t)$. Giả sử ban đầu chất điểm đứng yên ở vị trí $x_o = x(0) = 10$. Hãy tìm vị trí x(t) của chất điểm tại thời điểm t bất kỳ trong hai trường hợp sau:

a) Không có lực nào khác tác động lên chất điểm.

b) Chất điểm chịu tác dụng của một lực tắc dần $f_2(t) = -8v(t)$; với $v(t)$ là vận tốc tức thời của chất điểm.



Hình 7.7

<u>Giải</u>

Trên hình 7.7 ta chọn chiều dương cùng chiều trục 0x. Khi $x > 0$ thì $f_1 < 0$; khi $x < 0$ thì $f_1 > 0$ (do lực hút hướng tâm). Khi $v > 0$ (chất điểm P đang chạy về phía bên phải) thì $f_2 < 0$; khi $v < 0$ (chất điểm P đang chạy về phía bên trái) thì $f_2 > 0$ (do lực hút tắt dần và ngược chiều vectơ vận tốc).

a) Theo định luật Newton, ta có : $m x'' = f_1 \Leftrightarrow 2x'' = -8x$

Ta được phương trình : $x'' + 4x = 0$, $x(0) = 10$, $x'(0) = v_o = 0$

Đặt $X = \mathscr{L}[x(t)]$; biến đổi Laplace hai vế phương trình và áp dụng tính chất đạo hàm hàm gốc ta được : $p^2 X - 10p + 4X = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{10p}{p^2+4}$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được : $x(t) = 10\cos 2t$.

b) Theo định luật Newton, ta có : $m x'' = f_1 + f_2 \Leftrightarrow 2x'' = -8x - 8x'$

Ta được phương trình : $x'' + 4x' + 4x = 0$, $x(0) = 10$, $x'(0) = v_o = 0$

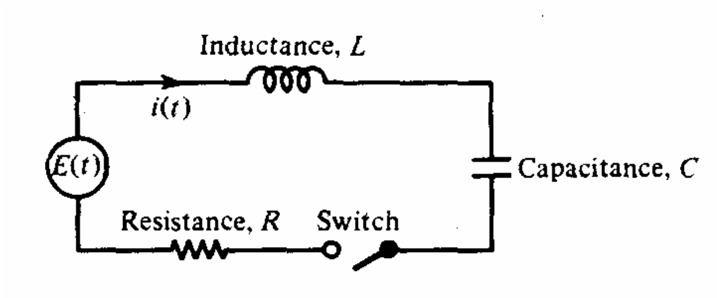
Đặt $X = \mathscr{L}[x(t)]$; biến đổi Laplace hai vế phương trình và áp dụng tính chất đạo hàm hàm gốc ta được :

$p^2 X - 10p + 4(pX - 10) + 4X = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{10p+40}{p^2+4p+4} \Leftrightarrow X = \dfrac{10}{p+2} + \dfrac{20}{(p+2)^2}$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được : $x(t) = 10e^{-2t} + 20t\, e^{-2t}$.

6. Ứng dụng vào giải tích mạch điện

★***Mạch RLC:*** Xét mạch điện như hình 7.8. Trong đó R, L, C là các hằng số.



Hình 7.8 Mạch RLC

Theo định luật Kirchoff ta có : $v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = E(t) \Leftrightarrow$

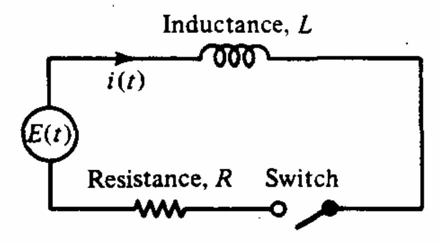
$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t) \Leftrightarrow \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = \frac{E(t)}{L}$$

♦ Nếu mạch không có phần tử C thì ta có : $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t)$

♦ Nếu mạch không có phần tử L thì ta có : $Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t)$

hay $\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{E(t)}{R}$

<u>Ví dụ 7.33</u> Xét mạch điện RL (hình 7.9). Trong đó i(0) = 0, R, L là các hằng số dương.



Hình 7.9 Mạch RL

a) Cho $E(t) = E_0$ là hằng số dương. Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$. Tính $\lim_{t\to+\infty} i(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $i(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

b) Tìm i(t) nếu $E(t) = E_0\sin\omega t$, ω là hằng số.

<u>Giải</u>

Đặt $\mathbf{I} = \mathbf{I}(p) = \mathscr{L}[i(t)] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\frac{di}{dt}\right] = \mathscr{L}[i'(t)] = p\mathbf{I} - i(0) = p\mathbf{I}$

a) $L\frac{di(t)}{dt} + R\,i(t) = E_o$, i(0) = 0 với E_o, R, L là các hằng số dương.

$Li'(t) + R\,i(t) = E_o$.

Biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$L\mathbf{I}p + R\mathbf{I} = \frac{E_o}{p} \Leftrightarrow \mathbf{I}\,(Lp + R) = \frac{E_o}{p}$$

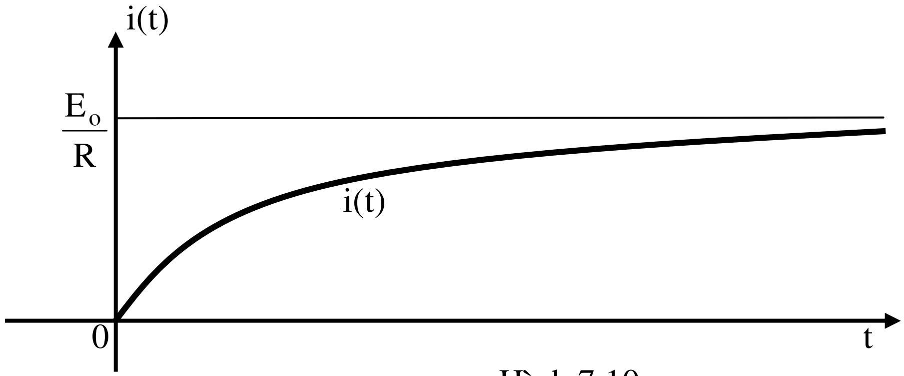
$$\Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{E_o}{p(Lp+R)} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{E_o}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right)$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được : $i(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\,\mathrm{I}\,\right] = \frac{E_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

$$\lim_{t\to+\infty} i(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{E_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E_o}{R}$$

Sau khoảng thời gian t đủ lớn $i(t) \approx \frac{E_o}{R}$

Đồ thị i(t) được biểu diễn trong hình 7.10.



Hình 7.10

b) $Li'(t) + R\,i(t) = = E_o\sin wt$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$L\mathbf{I}p + R\mathbf{I} = \frac{E_o w}{p^2+w^2} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{E_o w}{(p^2+w^2)(Lp+R)}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{E_o w}{L}\left(\frac{1}{(p^2+w^2)(p+\frac{R}{L})}\right) \Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{E_o w}{L}\left(\frac{Ap+Bw}{p^2+w^2} + \frac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$$

Biến đổi ngược hai vế ta được : $i(t) = \frac{E_o w}{L}\left(A\cos wt + B\sin wt + Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$ (*)

Tìm A, B, C bằng cách xét : $\frac{1}{(p^2+w^2)(p+\frac{R}{L})} = \frac{Ap+Bw}{p^2+w^2} + \frac{C}{p+\frac{R}{L}}$ (**)

- Nhân hai vế của (**) với $\left(p+\frac{R}{L}\right)$ và cho $p \to -\frac{R}{L}$ ta được:

$$C = \lim_{p\to-\frac{R}{L}} \frac{1}{p^2+w^2} = \frac{L^2}{R^2+w^2L^2}$$

- Nhân hai vế của (**) với p và cho $p \to \infty$ ta được :

$$0 = A + C \Rightarrow A = -C = \frac{-L^2}{R^2 + w^2L^2}$$

♦ Từ (**) cho p = 0 ta được : $\frac{L}{w^2R} = \frac{B}{w} + C\frac{L}{R} \Rightarrow B = \frac{wRL}{(R^2 + w^2L^2)}$

Thay A, B, C vào (*) ta được kết quả:

$$i(t) = \frac{-E_0wL}{R^2 + w^2L^2}\cos wt + \frac{wRL}{(R^2 + w^2L^2)}\sin wt + \frac{-E_0wL}{R^2 + w^2L^2}\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

◆

BÀI TẬP

<u>Bài 7.1</u> Tìm ảnh của các hàm số sau:

1) $f(t) = e^{-t}\sin^2 t$
2) $f(t) = 3t^5e^{-t} + 3te^t + 7$
3) $f(t) = 2e^{-3t}\sin t - 5e^t\cos 2t + 3$
4) $f(t) = t\cos 2t - 3t\sin 3t + 4$
5) $f(t) = 4e^{3t}\sin^2 t + 2t^3e^{2t} + 5e^{-t}\,\mathrm{sh}3t + 4\cos^2 t$.
6) $f(t) = 4e^t\sin^4 t + t^3e^{2t} + 6t\,\mathrm{sh}2t + 3$.
7) $f(t) = te^t\cos t + t^2e^{-3t}\sin 2t$
8) $f(t) = te^{-2t}\mathrm{ch}at$
9) $f(t) = \frac{t^2}{2} + 1 + te^t + t\cos^3 t$
10) $f(t) = 4e^{-3t}\cos^2 3t + t^3e^t + 5e^{-2t}\mathrm{ch}t + 7$.

<u>Bài 7.2</u> Tìm biến đổi Laplace các hàm số sau: (hàm tuần hoàn)

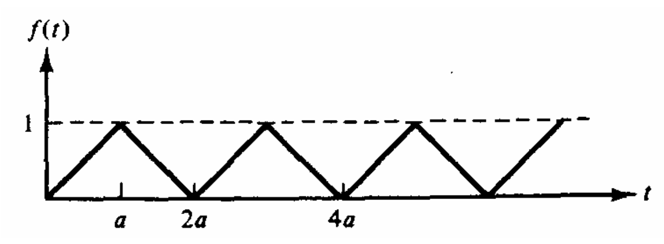
a) $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > 0 \end{cases}$, $f(t+\pi) = f(t)$

b) $f(t) = \begin{cases} \sin t \text{ khi } 0 \le t < \pi \\ 0 \text{ khi } \pi \le t < 2\pi \end{cases}$, $f(t+2\pi) = f(t)$

c) $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$ $f(t+2) = f(t)$

d) $f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \text{ khi } 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t \text{ khi } \frac{\pi}{2} \le t < 2\pi \end{cases}$, $f(t+2\pi) = f(t)$

<u>Bài 7.3</u> Cho hàm gốc f(t) có đồ thị như hình vẽ.



a) Viết phương trình của f(t).

b) Tìm ảnh của f(t).

Bài 7.4 Tìm ảnh của các hàm gốc (chia t, tích chập)

a) $f(t)= \dfrac{\sin^2 t}{t}$

b) $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$

c) $f(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\sin \pi t$

d) $f(t) = \int_0^t (t-u)^2 \cos 2u\, du$

e) $f(t) = t^2 * e^{3t}\sin 2t$

f) $f(t)= \dfrac{\text{sh}t}{t}$

Bài 7.5 Tính các tích chập f*g:

a) $f(t) = t$, $g(t) = 1$

b) $f(t) = \cos t$, $g(t) = t$

c) $f(t) = e^t$, $g(t) = t$

d) $f(t) = t^2$, $g(t) = e^t$

e) $f(t) = e^t$, $g(t) = e^t \sin t$

f) $f(t) = t$, $g(t) = \sin t$

g) $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = 1$

Bài 7.6 Chứng minh rằng

a) $f*g = g*f$ b) $(f*g)*h = f*(g*h)$ c) $f*(g+h) = f*g + f*h$

Bài 7.7 Tìm $\mathscr{L}[\, f*g \,]$

a) $f(t) = t$, $g(t) = \sin t$	d) $f(t) = e^t$, $g(t) = te^{2t}$
b) $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = 1$	e) $f(t) = t^2$, $g(t) = e^{3t}\sin 2t$
c) $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos 2t$	

Bài 7.8 Tìm gốc của các hàm ảnh sau đây:

1) $F(p) = \dfrac{a}{bp + c}$; $b \neq 0$;

2) $F(p) = \dfrac{ap}{bp^2 + c}$; $b \neq 0$;

3) $F(p) = \dfrac{2p - 1}{p^2 + p - 3}$

4) $F(p) = \dfrac{3 - p}{p^2 + p + 1}$

5) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2 + 1)^3}$

6) $F(p) = \dfrac{3p}{2p^2 - 7}$

7) $F(p) = \dfrac{p^2 - 9}{p^3 + 9p}$

11) $F(p) = \dfrac{5p + 3}{(p-1)(p^2 + 2p + 5)}$

12) $F(p) = \dfrac{2p + 3}{(p+1)^2 (p+2)^2}$

13) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}$

14) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2 - 3p + 2)(p^2 - 2)}$

15) $F(p) = \dfrac{2p^2 - 6p + 5}{p^3 - 6p^2 + 11p - 6}$

16) $F(p) = \dfrac{5}{(p-3)(p-1)} + \dfrac{p-1}{p^2 - 4p - 5}$

17) $F(p) = \dfrac{6}{(p-5)(p-2)} + \dfrac{p}{p^2 - 2p + 2}$

8) $F(p) = \dfrac{6}{(p-3)(p-1)(p+2)} + \dfrac{p+6}{p^2+4p+20}$

9) $F(p) = \dfrac{10p+6}{(p+3)(p-1)(p-4)} + \dfrac{p+8}{p^2-6p+25}$

10) $F(p) = \dfrac{4}{(p-3)(p-1)} + \dfrac{p+1}{p^2-6p+25}$

18) $F(p) = \dfrac{6}{(p-3)(p+2)} + \dfrac{5}{p^2+4p+20}$

19) $F(p) = \dfrac{4}{3p+2} - \dfrac{2p}{5p^2+1} + \dfrac{1}{2p^2+9}$

Bài 7.9 Tìm gốc của các hàm ảnh sau đây: (Áp dụng khai triển chuỗi)

a) $F(p) = \dfrac{1}{p}\sin(\dfrac{1}{p})$

b) $F(p) = \dfrac{1}{p}\cos(\dfrac{1}{p})$

c) $F(p) = \ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$

d) $F(p) = e^{\frac{1}{p^2}} - 1$

Bài 7.10 Áp dụng biến đổi Laplace giải các phương trình vi phân sau:

1) $y'' - 2y' + 10y = \cos 2t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2) $y'' + y = t - (t-1)\,u(t-1)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

3) $2y'' - 3y = 4\sin t + 5\cos t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$

4) $y'' + 2y = 3\cos 2t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

Bài 7.11 Tìm nghiệm riêng của hệ phương trình vi phân:

a) $\begin{cases} x' - 5y = \cos t \\ x + y' - 6y = e^{-t} \end{cases}$ với điều kiện $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

b) $\begin{cases} x' - x + 2y = 3 \\ 3x' + y' - 4x + 2y = 0 \end{cases}$ với điều kiện ban đầu : $x(0) = y(0) = 0$

c) $\begin{cases} x' - 4y = 2 \\ x + y' - 5y = e^{-5t} \end{cases}$ với điều kiện $x(0) = 0$ và $y(0) = 0$

d) $\begin{cases} x' = -2y + 3t \\ y' = 2x + 4 \end{cases}$ với điều kiện ban đầu : $x(0) = 2$, $y(0) = 3$

e) $\begin{cases} x' + 2y'' = e^{-t} \\ x' + 2x - y = 1 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$.

f) $\begin{cases} y' + z' = t \\ y'' - z = e^{-t} \end{cases}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$, $z(0) = 0$

g) $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = \sin t \\ y'' + 2z' + y = 0 \end{cases}$, $y(0) = y'(0) = z(0) = 0$

Bài 7.12 Tìm biến đổi Laplace các hàm số sau:

a) $f(t) = e^{2(t-1)}\cos 3(t-1)\, u(t-1)$

b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 < t < 1 \\ 1 \text{ khi} & t \geq 1 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{khi } t > 1 \\ 0 \text{ khi} & 0 < t < 1 \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi \\ \sin t & t > \pi \end{cases}$

Bài 7.13 Giải các phương trình vi phân

1) $y' - y = f(t)$; $y(0) = 0$; $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 1 \\ -1 & t > 1 \end{cases}$

2) $y' - 3y = f(t)$, $y(0) = 2$; $f(t) \begin{cases} \sin t & 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & > t \quad \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

3) $y' + y = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 < t < 2 \\ 0 \text{ nếu } t > 2 \end{cases}$, $y(0) = 0$

4) $y'' + y = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ -1 & \text{nếu } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{nếu } t > 2 \end{cases}$, $y(0) = y'(0) = 0$

5) $y'' - y' = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{nếu } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu } t > 1 \end{cases}$, $y(0) = y'(0) = 0$

6) $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, với $f(t) = \begin{cases} -t+1 & \text{khi } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{khi } t > 1 \end{cases}$

7) $y' - y = f(t)$, $y(0) = 2$, với $f(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 \leq t < 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{khi } t \geq 1 \end{cases}$

8) $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 3$, với $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 \leq t < \pi \\ \sin 2t & \text{khi } t > \pi \end{cases}$

9) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, với $f(t) = \begin{cases} t & \text{khi } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{khi } t > 1 \end{cases}$

10) $y' + 3y = f(t)$, $y(0) = 1$, với $f(t) = \begin{cases} E_o & \text{khi } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{khi } t \geq 1 \end{cases}$

11) $y' - 2y = f(t)$, $y(0) = 2$, với $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 \leq t < 2 \\ e^t & \text{khi } t \geq 2 \end{cases}$

12) $y' - 3y = f(t)$, $y(0) = 2$, với $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{khi } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{khi } t > \pi \end{cases}$

Bài 7.14 Giải các phương trình tích phân

a) $y(t) = 1+2\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$ **b)** $y(t) = 2e^{3t} - \int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)d\tau$ **c)** $x(t) = e^{-t} + 4\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau$	**d)** $x(t) = 4e^{t} + 3\int_0^t e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau$ **e)** $x(t) = e^{2t} + 5\int_0^t [\cos 2(t-\tau)]x(\tau)d\tau$

Bài 7.15 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x(t) = t^2 + \int_0^t y(u)du \\ y(t) = t + \int_0^t z(u)du \\ z(t) = 1 + \int_0^t x(u)du \end{cases}$

Bài 7.16 Giải các phương trình vi phân:

a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.

b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2e^t$, $y(0) = A$, $y'(0) = B$, $y''(0) = C$.

Bài 7.17 Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng sao cho độ dời x từ một điểm cố định O vào lúc t được cho bởi: $x'' + 4x' + 5x = 80\sin 5t$

a) Tìm x(t) biết lúc t = 0, chất điểm đứng yên ở x = 0.

b) Tìm biên độ, chu kỳ và tần số sau một thời gian dài.

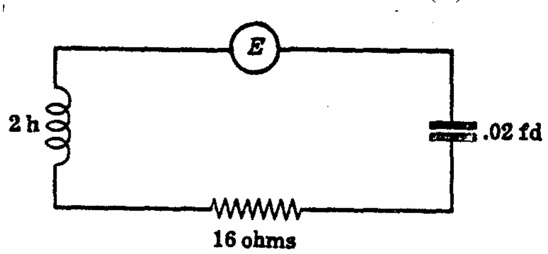
Bài 7.18 Dòng điện i(t) trong mạch nối tiếp RL thỏa phương trình vi phân :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \text{ (volts) ; } i(0) = 0, \text{ R, L là các hằng số.}$$

a) Tìm i(t) nếu $E(t) = E_0\cos\omega t$, ω là hằng số.

b) Tìm i(t) nếu $E(t) = \begin{cases} 10t \ , & 0 < t \le 5 \\ 10 \ , & t > 5 \end{cases}$

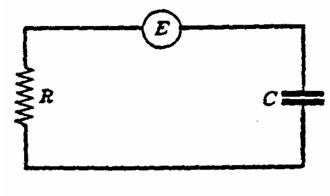
Bài 7.19 Cho mạch điện ***RLC*** như hình vẽ và biết i(0) = 0.



a) Cho E = 300 (volts) . Tìm i(t) , t > 0.

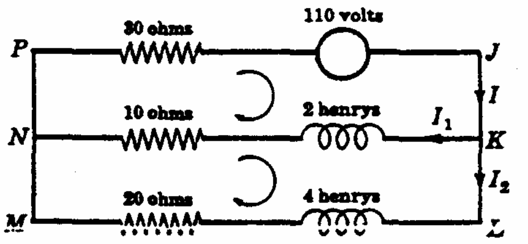
b) Cho E = 100sin3t (volts) . Tìm i(t) , t > 0.

Bài 7.20 Cho mạch điện RC như hình vẽ và biết i(0) . Tìm i(t) trong hai trườngng hợp sau:



a) Cho E = E_0 (volts) . b) Cho E = $E_0\, e^{-\alpha t}$ (volts) .

Bài 7.21 Cho mạch điện như hình vẽ và biết $i_1(0) = i_2(0) = 0$.



Áp dụng định luật Kirchoff , tìm $i_1(t)$, = $i_2(t)$.

BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT

Định luật truyền nhiệt của Newton (Newton's law of cooling)

Vận tốc nguội lạnh hoặc nóng lên của một vật trong môi trường tỷ lệ với hiệu giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ môi trường xung quanh. Tức là,

nếu gọi

T = T(t) là nhiệt độ của vật theo thời gian

T_m là nhiệt độ môi trường

k là hệ số tỷ lệ

thì

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Bài 7.22 Một xác chết được phát hiện vào lúc 15 giờ ngày thứ hai trong một nhà kho có nhiệt độ là 50^oF . Nhiệt độ xác chết khi được phát hiện là 80 ^oF và 20 phút sau giảm xuống 78 ^oF. Biết nhiệt độ của một người sống trung bình là 98.6 ^oF, áp dụng định luật tỏa nhiệt của Newton, hãy xác định ngày giờ mà người này chết.

Bài 7.23 Vận tốc nguội lạnh của một vật trong không khí tỷ lệ với hiệu giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ của không khí. Áp dụng biến đổi Laplce tìm quy luật nguội lạnh của vật nếu nhiệt độ của không khí là 20^oc và sau 20 phút nhiệt độ của vật giảm từ 100^oc xuống 60^oc. Hỏi sau bao lâu nhiệt độ của vật giảm tới 30^oc.

Bài 7.24 Mất 15 phút để nhiệt độ của một vật tăng từ 10^oc lên 20^oc trong một căn phòng có nhiệt độ là 30^oc . Theo định luật tỏa nhiệt của Newton, phải mất bao lâu để vật đó tăng nhiệt độ từ 20^oc tới 25^oc?

❋ Bài toán dân số (population growth)

Bài 7.25 Các nhà dân số học cho rằng quy luật tăng dân số P(t) theo thời gian t thỏa phương trình vi phân sau:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

Trong đó thời gian tính theo đơn vị năm, r là tỷ lệ tăng dân số hằng năm.

Ở nước ta, trong giai đoạn 2010-2020, dự kiến tỷ lệ tăng dân số trung bình hằng năm là 1% và dân số vào năm 2012 sẽ vào khoảng 88 triệu người. Hỏi đến năm 2020, dân số nước ta khoảng bao nhiêu người?

❋ **Bài toán di cư dân số (Emigration from a population)**

Bài 7.26 Giả sử dân số của một cộng đồng tăng theo quy luật hàm mũ với tỷ lệ tự nhiên là r và E(t) công dân di cư khỏi cộng đồng tại thời điểm t, do đó:

$$\frac{dP}{dt} = rP - E$$

Giải phương trình xác định dân số tại thời điểm t trong mỗi trường hợp sau:

a) r = 0.03, E(t) = 10t, P(0) = 100.00
b) r = 0.015, E(t) = $200e^{-t}$, P(0)=250.000

❋ **Bài toán nhập cư dân số (Immigration to a population)**

Bài 7.27 Giả sử dân số của một cộng đồng dân cư là P(t) tăng theo quy luật hàm mũ với tỷ lệ tự nhiên r và I(t) công dân nhập cư vào cộng đồng tại thời điểm t, do đó

$$\frac{dP}{dt} = rP + I(t)$$

Giải phương trình vi phân ứng với r = 0.02, I(t) = $100e^{-t}$, P(0) = 300.000 , t có đơn vị là năm.

Mô hình giá cả hài hòa, mô hình tự điều chỉnh giá (price adjustment model)

Bài 7.28 Độ biến thiên về giá của sản phẩm tại thời điểm t tỷ lệ với hiệu giữa lượng cầu và lượng cung. Tức là, nếu $p = p(t)$ là giá của sản phẩm tại thời điểm t thì

$$\frac{dp}{dt} = k\big(D(t) - S(t)\big)$$

trong đó k là hằng số dương và $D(t)$, $S(t)$ lần lượt là lượng cầu và lượng cung ứng với giá $p = p(t)$. Hãy xác định giá $p = p(t)$ biết $k = 0.02$, $D(t) = 3 + 7e^{-t}$, $S(t) = 2 + p(t)$, $p(0) = 4$ (*đơn* vị tính: USD). Giá của sản phẩm sẽ như thế nào sau khoảng thời gian t đủ lớn?

Bài 7.29 (thời gian t tính bằng tháng, giá p tính bằng USD)

Biết giá $p = p(t)$ của một loại sản phẩm tại thời điểm t thỏa phương trình vi phân

$$p''+5p'+6p = te^{-t} + 100,\ p(0)=90\ \ p'(0)=1$$

a) Giải phương trình vi phân trên.

b) Xác định giá của sản phẩm sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Bài 7.30 (***Resale value problem***)

Giá trị bán lại $r(t)$ của một máy sau t năm sẽ giảm với tốc độ tỷ lệ với hiệu giữa giá trị hiện tại và giá trị phế liệu của máy. Tức là, nếu S là giá trị phế liệu của máy thì $r(t)$ thỏa phương trình

$$\frac{dr}{dt} = -k(r-S)\text{ , với } k = const > 0 \text{ là hằng số tỷ lệ}$$

Giả sử $r(t)$ là giá trị chiếc máy tính của bạn sau t năm kể từ ngày mua và $r(t)$ thỏa phương trình (1). Tìm $r(t)$ biết giá trị mua mới của máy là 16 triệu đồng, giá trị 2 năm sau là 6 triệu và giá trị phế liệu $S = 0.5$ triệu đồng.

Bài 7.31 (***Resale value problem***)

Giá trị bán lại $r(t)$ của một máy sau t năm sẽ giảm với tốc độ tỷ lệ với hiệu giữa giá trị hiện tại và giá trị phế liệu của máy. Tức là, nếu S là giá trị phế liệu của máy thì $r(t)$ thỏa phương trình

$$\frac{dr}{dt} = -k(r-S)\text{ , với } k = const > 0 \text{ là hằng số tỷ lệ}$$

Xác định $r(t)$ biết giá trị mua mới của máy là \$16.000, giá trị 2 năm sau là \$8.000 và giá trị phế liệu $S = \$500$.

Bài 7.32 (***bài toán dân số – population growth***)

Giả sử dân số $P(t)$ (đơn vị là triệu người) của một cộng đồng tăng theo quy luật hàm mũ với tỷ lệ tự nhiên là r và $E(t)$ (đơn vị triệu người/năm) công dân di cư khỏi cộng đồng tại thời điểm t, $I(t)$ (đơn vị triệu người/năm) công đn nhập cư vào cộng đồng tại thời điểm t. Tức là, $P(t)$ thoả phương trình vi phân

$$\frac{dP}{dt} = rP - E(t) + I(t)$$

Giải phương trình xác định dân số tại thời điểm t (đơn vị là năm) trong trường hợp

r = 0.01, $E(t) = 0.05e^{-t}$, $I(t) = 0.01$, P(0) = 90 triệu

Bài 7.33 Tìm ảnh của các hàm gốc:

a) $f(t) = 5 - 3e^{-3it} + 8t^2\,\mathrm{ch}2t$

b) $f(t) = u(t-\frac{\pi}{4})\sin(t-\frac{\pi}{4}) + \int_0^t e^{2u}\cos 3u\,du$

c) $f(t) = u(t-5)\sin(3t-15) + t\int\limits_0^t e^{-2u}\cos u du$ d) $f(t) = \sin^3 t + t^2 cht + \int\limits_0^t e^{-2(t-u)}\sin 3u du$

Bài 7.33

a)Khai triển Laurent hàm F(p) = $e^{\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p}$ quanh điểm bất thường cô lập p = 0.

Tìm gốc của hàm ảnh F(p).

b) Khai triển Laurent hàm $F(p) = \frac{1}{p^3}\cos\frac{1}{p}$ quanh điểm bất thường cô lập p = 0.

Tìm gốc của hàm ảnh F(p).

c) Khai triển Laurent hàm $F(p) = \frac{1}{p^2}\left(\ln(1+\frac{1}{p^2}) - \frac{1}{p^2}\right)$ quanh điểm bất thường cô lập p = 0. Tìm gốc của hàm ảnh F(p).

Bài 7.34 Tìm gốc của các hàm ảnh:

a)F(p) = $\frac{p^2+p+1}{(p^2-6p+13)(p-1)^2}$ b) $F(p) = \frac{1}{p^3}\left(e^{\frac{1}{p}} - 1\right)$

c) F(p) = $\frac{p^2+2p+5}{(p^2-4p+29)(p-1)} + e^{\frac{1}{p^2}} - 1$

Bài 7.35 Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân:

a) y(t)= e^{5t}- 3cos2t+10 $\int\limits_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ b) y(t)= sin4t+3e^{5t} +2 $\int\limits_0^t y(u)\cos(t-u)du$

c) $y(t) = 6e^{-2t} + 2\int\limits_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$ d) $y(t) = e^{-3t} + \sin 3t + 2\int\limits_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$

Bài 7.36 Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

a) y’’ -4y’ +20y = e^{3t} +6sin3t , với y(0) = 0, y’(0) = 1

b) y’’ - 6y’ + 25y = $3e^{4t} + 3t$, với y(1) = 0, y’(1) = 1

c) y’’ +6y’ + 25y = e^{-3t} +e^{2t} + 3sin4t- cos4t, với y(0) = 0, y’(0) = 0

d) y’- 3y = 2+ u(t-π)$e^{2(t-\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 3

e)y’’ –2y’ –3y = $\begin{cases} 0 , & 0 < t < \pi \\ \cos 2t, & t > \pi \end{cases}$ với y(0) = 0, y’(0) = 2

Bài 7.37 Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

a) $\begin{cases} x' - 5y = \cos 3t \\ x + y' - 6y = 2 \end{cases}$, với điều kiện x(0) = 0, y(0) = 1

b) $\begin{cases} x' + 4y = \sin t \\ x + y' + 3y = e^{2t} \end{cases}$ với điều kiện x(0) = 0, y(0) = 0

c) $\begin{cases} x' - 2y = e^{-3t} \\ y' + 2x = 3t \end{cases}$, với điều kiện x(0) = 3, y(0) = 2

PHẦN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chương 1 SỐ PHỨC VÀ MẶT PHẲNG PHỨC

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1 Giá trị chính của argument của một số phức $z \neq 0$ là duy nhất.

Câu 2 $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Câu 3 Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Khi đó :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases}$$

Câu 4 Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Khi đó :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 - 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

Câu 5 Cho $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ là hai số phức khac 0.. Khi đó

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases}$$

Câu 6 Cho $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ là hai số phức khác 0. Khi đó

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 - 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

Câu 7 Với $z \neq 0$ và $|z| = r$ thì $\sqrt[n]{z}$ có tất cả n giá trị và chúng có biểu diễn hình học là n đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn tâm 0 bán kính là $\sqrt[n]{r}$.

Câu 8 Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Khi đó căn bậc n của z là

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right);$$ k = 1, 2,..., n ; n là số nguyên dương.

Câu 9 Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Khi đó căn bậc n của z là

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi - k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi - k2\pi}{n}\right);$$ k = 0, 1,..., n-1 ; n là số nguyên dương.

Câu 10 Nếu $\mathrm{Re}z \neq 0$ thì $\mathrm{Re}(z^n) \neq 0$.

Câu 11 Nếu $\mathrm{Im}z \neq 0$ thì $\mathrm{Im}(z^n) \neq 0$.

Câu 12 Cho ba số phức khác 0 là $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_3 = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3) \neq 0$. Khi đó:

$$\frac{z_1.z_2}{z_3} = \frac{r_1.r_2}{r_3}\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)\right]$$

Câu 13 Cho $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ là hai số phức dạng mũ khác 0. Khi đó:

$$|z_1| \le |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 \le r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases}$$

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN

(Chọn một trong 4 câu : A, B, C, D)

Câu 14 Khai căn bậc bốn số phức z =1 ta được:

A) $\sqrt[4]{1} = \pm 1$.
B) $\sqrt[4]{1} = -1$.
C) $\sqrt[4]{1} = 1$.
D) $\sqrt[4]{1} = \pm 1$ và $\pm i$

Câu 15 Khai căn bậc bốn số phức z = 16 ta được:

A) $\sqrt[4]{16} = 2$.
B) $\sqrt[4]{16} = -2$.
C) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ và $\pm 2i$
D) $\sqrt[4]{16} = 2; 2i$

Câu 16 Cho z là một số phức . Khẳng định nào sau đây đúng:

A) $\sqrt{z^2} = |z|$.
B) $\sqrt{z^2} = \pm z$
C) $\sqrt{z^2} = z$
D) Cả A , B , C đều đúng.

Câu 17 Từ đẳng thức $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{20} = a + ib$, với a và b là hai số thực , ta được :

a) $a = 1, b = \sqrt{3}$
c) $a = -2^{19}$, $b = \sqrt{3}.2^{19}$
b) $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$
d) $a = 2^{20}$, $b = \sqrt{3}.2^{20}$

Câu 18 Khẳng định nào sau đây đúng :

A) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = \pm z_2$.

B) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

C) $|z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|$.

D) $|z_1| = |z_2| = r$ khi và chỉ khi z_1 và z_2 cùng thuộc đường tròn tâm 0 bán kính r.

Câu 19 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^2 = 9e^{i(\pi + 2k\pi)}$ (k là số nguyên) là:

A) {3i, -3i}　B) {9i}　C) {-3i}　D) {3, -3}

Câu 20 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^2 = 49e^{i(\pi + 2k\pi)}$ (k là số nguyên) là:

A) {7i, -7i}　B) {7i}　C) {-7i}　D) {7, -7}

Câu 21 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^2 = e^{4+\pi i}$ là

A) $\varnothing$　B) $\{e^2, -e^2\}$　C) $\{e^2 i, -e^2 i\}$　D) $\{i2e, -i2e\}$

Câu 22 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^4 = 16e^{i(\pi + 2k\pi)}$ (k là số nguyên) là:

A) {2i, -2i}　B) {-2,2}　C) {-2, 2, 2i, -2i}　D) { $\sqrt{2}$ +i$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ -i$\sqrt{2}$, -$\sqrt{2}$ +i$\sqrt{2}$, -$\sqrt{2}$ -i$\sqrt{2}$ }

Câu 23 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^3 = 8e^{6-i2\pi}$ là

A) $\left\{2e^2, 2e^2(1+i\sqrt{3}), 2e^2(1-i\sqrt{3})\right\}$ B) $\left\{2e^2, e^2(1+i\sqrt{3})\right\}$

C) $\left\{2e^2, e^2(-1+i\sqrt{3}), e^2(-1-i\sqrt{3})\right\}$ D) $\left\{2e^2\right\}$

Câu 24 Tập hợp nghiệm của phương trình $z^4 = 81e^{i2k\pi}$ (k là số nguyên) là:

A) {-3, 3, 3i, -3i} B) {3i, -3i}

C){-3,3} D){$3\sqrt{2}$ +i3$\sqrt{2}$,3$\sqrt{2}$ -i3$\sqrt{2}$,-3$\sqrt{2}$ +i3$\sqrt{2}$, -3$\sqrt{2}$ -i3$\sqrt{2}$ }

Câu 25 Các căn bậc 3 của số phức $z = 4\left(1+i\sqrt{3}\right)$ là

A) $2\left(\cos\dfrac{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi}{3}\right)(k=0,1,2)$

B) $2\left(\cos\dfrac{\dfrac{-2\pi}{3}+k2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\dfrac{-2\pi}{3}+k2\pi}{3}\right)(k=0,1,2)$

C) $2\left(\cos\dfrac{\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi}{3}\right)(k=0,1,2)$

D) $2\left(\cos\dfrac{\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi}{3}\right)(k=0,1,2)$

Câu 26 Cho các số phức $z = \dfrac{e^{-2}}{1-2i} + e^{2i}$. Khi đó.

A) $\text{Re}z = e^{-2} + \cos 2$, $\text{Im}z = e^{-2} + \sin 2$

B) $\text{Re}z = \dfrac{e^{-2}}{5} + \cos 2$, $\text{Im}z = \dfrac{2e^{-2}}{5} - \sin 2$

C) $\text{Re}z = \dfrac{e^{-2}}{5} + \cos 2$, $\text{Im}z = \dfrac{2e^{-2}}{5} + \sin 2$

D) $\text{Re}z = e^{-2} + \cos 2$, $\text{Im}z = 2e^{-2} + \sin 2$

Câu 27 Phần thực và phần ảo của số phức $z = \dfrac{1+3i}{2+i} - i^5 + e^{-3i}$ là:

A) Rez = 1 + cos3, Imz = -sin3

B) Rez = 1 + cos3, Imz = sin3

C) Rez = 1 + cos3, Imz = 2 – sin3

D) Rez = 1 – cos3, Imz = -2 – sin3

Câu 28 Cho số phức z = r(cosφ + isinφ) ≠ 0. Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi+k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+k2\pi}{n})$; k = 2, 3,..., n+1; n là số nguyên dương.

B) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi-k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi-k2\pi}{n})$; k = 0, 1,..., n-1 ; n là số nguyên dương.

C) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2n}$ = cosn2φ -isinn2φ . **D)** Nếu Rez ≠ 0 thì $\text{Re}(z^n) \neq 0$. Nếu Imz ≠ 0 thì $\text{Im}(z^n) \neq 0$.

Câu 29 Khẳng định nào sau đây sai?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n$ = cosnφ ± i sinnφ , ∀n∈Z. B) Phương trình $e^Z = 2014.e^{\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \mp 2k\pi \end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi)$, $\forall n \in Z$.

<u>Câu 30</u> Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-1-i| = |z-2|\}$, $F = \{z : |z-2+3i| \le 3\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E không bị chặn và F là tập compact.

B) Tập F là hình tròn đóng tâm -2+3i bán kính bằng 3.

C) Tập E là tập không bị chặn.

D) Tập F là hình tròn đóng tâm 2-3i bán kính bằng 3.

<u>Câu 31</u> Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z / |z-z_1| = |z-z_2|, z_1 \ne z_2\}$, $F = \{z / |z-1+i| \le 9\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A)Tập F là tập compact.

B) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối z_1 với z_2.

C) Tập E là tập không bị chặn.

D)Tập F là hình tròn đóng tâm -1+i bán kính bằng 9.

<u>Câu 32</u> Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-1+i| = |z-2|\}$, $F = \{z : |z-2+3i| \le 16\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E không bị chặn và F là tập compact.

B) Tập F là hình tròn đóng tâm -2+3i bán kính bằng 4 .

C) Tập E là tập không bị chặn.

D) Tập F là hình tròn đóng tâm 2-3i bán kính bằng 16.

<u>Câu 33</u> Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-1+i| = |z-4|\}$, $F = \{z : |z-2-3i| \le 3\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E không bị chặn và F là tập compact.
B) Tập F là hình tròn đóng tâm 2+3i bán kính bằng 9.
C) Tập F là hình tròn đóng tâm 2+3i bán kính bằng 3.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 1+i với 2.

<u>Câu 34</u> Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z-1+i| \le 3\}$, $F = \{z : |z-3+4i| > 5\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E là hình tròn đóng tâm $1-i$ bán kính bằng 3.
B) Tập F là hình tròn mở tâm $3-4i$ bán kính bằng 5.
C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.
D) Tập E là tập bị chặn (giới nội).

<u>Câu 35</u> Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-3+i|\}$, $F = \{z : |z-3-2i| \le 4\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập F là hình tròn đóng tâm $3+2i$ bán kính bằng 4 .
B) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $-1+i$ và $3-i$.
C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.
D) Hai tập E và F đều là tập bị chặn (tập giới nội).

Câu 37 Khẳng định nào sau đây **sai**?

A) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n\in Z$. B) Phương trình $e^Z = 2016.e^{-3\pi i}$ vô nghiệm.

C) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \pm 2k\pi \end{cases}$

D) $[r(\cos\varphi \mp i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi \mp i\sin n\varphi)$, $\forall n\in Z$.

Câu 38 Cho các số phức $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Khẳng định nào sao đây sai?

A) $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

B) $z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

C) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2}$, với $z_2 \neq 0$.

D) $z_1 + 1 - i = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 1 = a_2 \\ b_1 - 1 = b_2 \end{cases}$

....

Chương 2 HÀM BIẾN PHỨC

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1 Nếu các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D thì hàm phức $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ bị chặn (về mudun) trên D.

Câu 2 Nếu hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ bị chặn (về mudun) trên D thì các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.

Câu 3 Nếu các hàm thực u(x,y), v(x,y) có giới hạn khi $(x,y) \to (x_o,y_o)$ thì hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ có giới hạn khi $z \to z_o = x_o + iy_o$.

Câu 4 Nếu hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ có giới hạn khi $z \to z_o = x_o + iy_o$ thì các hàm thực u(x,y), v(x,y) có giới hạn khi $(x,y) \to (x_o,y_o)$.

Câu 5 Nếu các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D thì hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục trên D.

Câu 6 Nếu các hàm thực u(x,y), v(x,y) không liên tục trên miền D thì hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ cũng không liên tục trên D.

Câu 7 Nếu hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ không liên tục trên miền D thì các hàm thực u(x,y), v(x,y) không liên tục trên miền D.

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN

(Chọn một trong 4 câu : A, B, C, D)

Câu 8 Mệnh đề nào sau đây sai?

A) Nếu các hàm thực u(x,y), v(x,y) không liên tục trên miền D thì hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ cũng không liên tục trên D.

B) Nếu hàm thực u(x,y) không liên tục trên miền D thì hàm phức $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ cũng không liên tục trên D.

C) Nếu hàm thực v(x,y) không liên tục trên miền D thì hàm phức $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ cũng không liên tục trên D.

D) Nếu hàm phức $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ không liên tục trên miền D thì hàm u(x,y) không liên tục trên miền D.

<u>Câu 9</u> Cho hàm số $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z\operatorname{Re} z}{|z|^2} & \text{khi } z \neq 0 \\ A & \text{khi } z = 0 \end{cases}$, với A là hằng số. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Hàm f(z) liên tục tại 0 khi A = 0.
B) Hàm f(z) liên tục tại 0 khi A = 1.
C) Hàm f(z) liên tục tại 0 khi A = -1.
D) Hàm f(z) không liên tục tại 0 với mọi A.

<u>Câu 10</u> Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Phương trình $e^z = -5$ vô nghiệm.
B) Phương trình sinz = 7 vô nghiệm.
C) Phương trình $\sin^2 z - 5\sin z + 6 = 0$ vô nghiệm.
D) Cả A, B, C đều sai.

<u>Câu 11</u> Ảnh của đường thẳng y = x qua phép biến hình $w = \dfrac{1}{z}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = v.
B) đường thẳng u = -v.
C) nửa đường thẳng u = v, với v > 0.
D) nửa đường thẳng u = -v, với v < 0.

<u>Câu 12</u> Ảnh của đường thẳng y = -x qua phép biến hình $w = \dfrac{1}{3z}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = v.
B) đường thẳng u = -v.
C) nửa đường thẳng u = v, với v > 0.
D) nửa đường thẳng u = -v, với v < 0.

<u>Câu 13</u> Ảnh của đường thẳng y = $\dfrac{\pi}{8}$ qua phép biến hình w = e^{-4z} = u +iv là

A) đường thẳng u = 0.
B) tia argw = -π/2.
tia argw = π/2.
đường thẳng v = 0.

<u>Câu 14</u> Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình w = e^{2-2iz} = u +iv là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^4$
B) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^2$
C) Đường thẳng v = 0
D) Đường thẳng u = 0

<u>Câu 15</u> Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w = e^{3+iz}$ = u +iv là

A) đường thẳng u = 0.
B) đường tròn $u^2 + v^2 = e^3$.
C) đường tròn $u^2 + v^2 = e^6$.
D) đường thẳng v = 0.

Câu 16 Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w = e^{1-2iz} = u + iv$ là

A)Đường thẳng u = 0 B) Đường thẳng v = 0.

C) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^2$ D) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$

Câu 17 Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ qua phép biến hình $w = z^3 = u + iv$ là

A) đường tròn $u^2 + v^2 = 16$. B) đường tròn $u^2 + v^2 = 8$.

D) đường tròn $u^2 + v^2 = 64$. D) đường tròn $u^2 + v^2 = 4$.

Câu 18 Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \dfrac{1+3i}{1-2i} - i^5 + e^{3z}$ là:

A) $u(x,y) = -1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

B) $u(x,y) = 1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

C) $u(x,y) = e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$

D) $u(x,y) = -1 + e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y) = -e^{3x}\sin 3y$

Câu 19 Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = \dfrac{4}{1-i} + e^{-iz} = u + iv$ là:

A) $u = 2 + e^y\cos x$, $v = 2 - e^y\sin x$

B) $u = 2 + e^y\cos x$, $v = 2 + e^y\sin x$

C) $u = 4 + e^{-y}\cos x$, $v = 4 - e^{-y}\sin x$

D) $u = 4 + e^y\cos x$, $v = 4 - e^y\sin x$

Câu 20 Ảnh của đường thẳng y = -1 qua phép biến hình $w = e^{1+iz} = u + iv$ là

A)Đường tròn $u^2 + v^2 = e^4$ B) Đường thẳng v = 0.

C)Đường tròn $u^2 + v^2 = e^2$ D) Đường thẳng u = 0

Câu 21 Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Hàm $w = \sqrt[5]{z}$ là hàm năm trị .

B) Hàm $w = \dfrac{z}{z^2+1}$ là hàm đơn trị xác định trên toàn mặt phẳng.

C) Hàm phức f(z) = u(x,y) +i v(x,y) bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D

Cho hàm biến phức f(z) = u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) + i\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$

Câu 22 Cho hàm phức $f(z) = ze^z = u + iv$ có phần thực và phần ảo là:

A) $u = xe^x\sin y + ye^x\cos y$, $v = xe^x\cos y - ye^x\sin y$

B) $u = xe^x\cos y - ye^x\sin y$, $v = xe^x\sin y + ye^x\cos y$

C) $u = xe^x\cos y$, $v = -ye^x\sin y$

D) một kết quả khác.

Chương 3 ĐẠO HÀM CỦA HÀM BIẾN PHỨC

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1 Hàm phức w = f(z) giải tích trong miền D khi và chỉ khi f(z) có đạo hàm tại mọi z trong D.

Câu 2 Hàm phức w = f(z) giải tích tại điểm z_o khi và chỉ khi f(z) có đạo hàm tại điểm z_o.

Câu 3 Cho hàm phức f(z) = u(x,y) +iv(x,y). Nếu hàm f(z) khả vi tại $z_o = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y) , v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Riemann (C-R) tại điểm (x_o,y_o) .

Câu 4 Hàm phức w = f(z) giải tích tại điểm z_o khi và chỉ khi f(z) giải tích trong một miền mở nào đó chứa điểm z_o.

Câu 5 Cho hàm phức f(z) = u(x,y) +iv(x,y). Nếu các hàm u(x,y) , v(x,y) thỏa điều kiện Cauchy – Riemann (C-R) tại điểm (x_o,y_o) thì f(z) khả vi tại $z_o = x_o+iy_o$.

Câu 6 Hàm phức w = f(z) giải tích trong miền D khi và chỉ khi f(z) khả vi tại mọi z trong D.

Câu 7 Hàm phức w = f(z) giải tích tại điểm z_o khi và chỉ khi f(z) khả vi tại điểm z_o.

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN

(chọn 1 trong các câu A, B, C, D)

Câu 8 Cho hàm phức f(z) = u(x,y) +iv(x,y). Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu hàm f(z) giải tích trên toàn mặt phẳng thì các hàm u(x,y), v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy- Riemann trên toàn mặt phẳng.

B) Nếu u(x,y) không là hàm điều hòa trên miền D thì f(z) không giải tích trên D.

C) Nếu v(x,y) không là hàm điều hòa trên miền D thì f(z) không giải tích trên D.

D) Nếu f(z) không giải tích trên miền D thì hàm u(x,y) không điều hòa trên D.

Câu 9 Cho hàm phức f(z) = u(x,y) +iv(x,y) khả vi tại z = x+iy. Khi đó đạo hàm f'(z) được tính bởi công thức:

A) f'(z) = $u'_y + iv'_y$. B) f'(z) = $u'_x + iv'_y$

C) f'(z) = $u'_x + iv'_x$ D) f'(z) = $u'_x + v'_x$

Câu 10 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y), v(x,y) không khả vi trên miền D.

C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).

D) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

Câu 11 Cho hàm phức f(z) = u(x,y) +iv(x,y). Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu các hàm u(x,y), v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy- Riemann trên toàn mặt phẳng thì hàm f(z) giải tích trên toàn mặt phẳng.

B) Nếu f(z) không giải tích trên miền D thì hàm v(x,y) không điều hòa trên D.

C) Nếu u(x,y) không là hàm điều hòa trên miền D thì f(z) không giải tích trên D.

D) Nếu v(x,y) không là hàm điều hòa trên miền D thì f(z) không giải tích trên D.

Câu 12 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.
B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y), v(x,y) không khả vi trên miền D.
C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = x_o+iy_o thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại (x_o,y_o).
D) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

Câu 13 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.
B)Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.
C)Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không khả vi trên miền D.
D)Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = x_o+iy_o thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Riemann tại (x_o,y_o).

Câu 14 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 9y + 5$, $v = 6xy + 9x + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 15 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = x^2 - y^2 + 5xy$, $v = xy^2 + 2x - 2y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A)u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B)u điều hòa, v không điều hòa.
C)v điều hòa, u không điều hòa
D)u, v điều hòa nhưng không phải là các hàm điều hòa liên hợp.

Câu16 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = 4x^2 - 4y^2 + 8xy$, $v = 2x^3y - 2xy^3$+2y. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D)v điều hòa, u không điều hòa

Câu 17 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = 4x^2 - 4y^2 + 10xy$, $v = 2x^3y - 2xy^3 + 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 18 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = 2x^2 - 2y^2 + 10xy$, $v = 6x^3y - 6xy^3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) u, v là các hàm điều hòa liên hợp
B) u điều hòa, v không điều hòa.
C) v điều hòa, u không điều hòa
D) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

Câu 19 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u = x^2y + x - y$; $v = x^2 - y^2 + xy$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A)u điều hòa, v không điều hòa.
B)v điều hòa, u không điều hòa
C)u, v là các hàm điều hòa liên hợp
D)u, v điều hòa nhưng không phải là các hàm điều hòa liên hợp.

Chương 4 TÍCH PHÂNHÀM BIẾN PHỨC

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1 Nếu hàm phức f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức thì $\oint_C f(z)dz = 0$, với C là đường tròn bất kỳ trong mặt phẳng phức.

Câu 2 Nếu hàm f(z) giải tích trên miền kín đơn liên bị chặn $\overline{D}$ với biên là C, z_o là điểm trong của D thì $\oint_c \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$, n = 0, 1,2, ...

Câu 3 Nếu hàm f(z) giải tích và bị chặn trong toàn mặt phẳng thì nó là hàm hằng.

Câu 4 Nếu hàm f(z) giải tích trong miền bị chặn $\overline{D}$ có biên bao gồm các đường cong C_0, C_1, C_2,........,C_n không thông nhau và C_0 bao C_1, C_2,........,C_n thì

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \dots\dots\dots + \oint_{C_n} f(z)dz$$

trong đó chiều đi trên C_0, C_1, C_2,........,C_n đồng thời cùng chiều kim đồng hồ.

Câu 5 Nếu hàm f(z) giải tích trong miền bị chặn $\overline{D}$ có biên bao gồm các đường cong C_0, C_1, C_2,........,C_n không thông nhau và C_0 bao C_1, C_2,........,C_n thì

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \dots\dots\dots + \oint_{C_n} f(z)dz$$

trong đó chiều đi trên C_0, C_1, C_2,........,C_n đồng thời ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 6 Nếu hàm f(z) giải tích trong miền đa liên D và C_1, C_2 là hai đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối thì $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

Câu 7 Nếu hàm f(z) giải tích trong miền đơn liên hoặc đa liên D và C_1, C_2 là hai đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối thì $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

Câu 8 Nếu hàm f(z) giải tích trong miền đơn liên D và C_1, C_2 là hai đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối thì $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

Câu 9 Nếu hàm f(z) giải tích trong miền bị chặn D và trên biên C của D thì $\oint_C f(z)dz = 0$, trong đó chiều đi trên C là chiều âm.

Câu 10 Nếu hàm f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức thì $\oint_{|z-a|=1} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$.

Câu 11 Nếu hàm f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức thì $\oint_{|z-a|=1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} = 2\pi i f'(a)$.

Câu 12 Cho a, b là các hằng số phức và C là đường tròn bất kỳ trong mặt phẳng phức. Nếu hai hàm phức f(z), g(z) giải tích trên tòan mặt phẳng thì $\oint_C \left(af(z) + bg(z)\right)dz = 0$.

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN

(Chọn một trong 4 câu : A, B, C, D)

Câu 13 Khẳng định nào sau đây đúng?

A)Nếu hàm f(z) giải tích trong miền đơn liên hoặc đa liên D và C_1, C_2 là hai đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối thì $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

B)Nếu hàm f(z) giải tích trong miền đơn liên D và C_1, C_2 là hai đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối thì $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

C)Nếu hàm f(z) giải tích trong miền đa liên D và C_1, C_2 là hai đường cong bất kỳ trong D có cùng điểm đầu và điểm cuối thì $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

D) Cả A, B, C đều đúng.

Câu 14 Cho hàm phức w = f(z) giải tích trên toàn mặt phẳng và các đường tròn C_1 : |z-2i|= 1 ; C_2 : |z+2i|= 1 ; C_3 : |z-5|= 1 ; C : |z | = 9 . Đặt I= $\oint_C \frac{f(z)dz}{(z^2+4)(z-5)^2}$;

$I_1= \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z^2+4)(z-5)^2}$; $I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)dz}{(z^2+4)(z-5)^2}$; $I_3 = \oint_{C_3} \frac{f(z)dz}{(z^2+4)(z-5)^2}$. Khi đó :

A) $I = I_1 + I_2 + I_3$ B) $I = I_1 + I_2$

C) $I_3 = I_1 + I_2 + I$ D) Cả ba câu A, B, C đều sai.

Câu 15 Cho hàm phức w = f(z) giải tích trên toàn mặt phẳng và các đường tròn

C_1 : |z-i|= $\frac{1}{4}$; C_2 : |z+i|= $\frac{1}{4}$; C_3 : |z+3|= $\frac{1}{4}$; C : |z | = 2 .

Đặt I= $\oint_C \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$; $I_1= \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$; $I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$;

$I_3 = \oint_{C_3} \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$. Khi đó :

A) $I_3 = I_1 + I_2 + I$ B) $I = I_1 + I_2 + I_3$

C) $I = I_1 + I_2$ D) Cả ba câu a), b), c) đều sai.

Câu 16 Cho hàm phức w = f(z) giải tích trên toàn mặt phẳng và các đường tròn C_1 : |z-i|= $\frac{1}{4}$; C_2 : |z+i|= $\frac{1}{4}$; C_3 : |z+3|= $\frac{1}{4}$; C : |z | = 2 . Đặt I= $\oint_C \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$;

$I_1= \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$; $I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$; $I_3 = \oint_{C_3} \frac{f(z)dz}{(z^2+1)(z+3)^2}$. Khi đó :

A) $I = I_1 + I_2 + I_3$ B) $I = I_1 + I_2$

C) $I_3 = I_1 + I_2 + I$ D) Cả ba câu A), B), C) đều sai.

Câu 17 Cho hàm phức w = f(z) giải tích trên toàn mặt phẳng và các đường tròn C_1 : |z-4i|= 2 ; C_2 : |z+3i|= 2 ; C_3 : |z|= 8 ; C_4 : |z-4| = 2 . Đặt $I_1= \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z^2+9)(z-5)^2}$; $I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)dz}{(z^2+9)(z-5)^2}$; $I_3 = \oint_{C_3} \frac{f(z)dz}{(z^2+9)(z-5)^2}$; $I_4 = \oint_{C_4} \frac{f(z)dz}{(z^2+9)(z-5)^2}$. Khi đó :

A) $I_4 = I_1 + I_2 + I_3$ B) $I_3 = I_1 + I_2 + I_4$

C) $I_4 = I_1 + I_2$ D) Cả A, B, C đều sai.

Câu 18 Khẳng định nào sao đây sai?

A) Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B) Hàm f(z) = $8z + e^{5z}$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\oint\limits_{|z+6i|=2} \frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i(8+5e^5)$ D) $\oint\limits_{|z-2i|=6} \frac{8z+e^{5z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i(8+5e^5)$

Câu 19 Khẳng định nào sao đây sai?

A)Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B)Hàm f(z) = $7z+e^z$ có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{7z+e^z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(7+e^3)$ D) $\oint\limits_{|z-4|=2} \frac{(7z+e^z)dz}{(z-3)^2} = 2\pi i(7+e^3)$

Câu 20 Khẳng định nào sao đây sai?

A)Hàm f(z) có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức khi và chỉ khi f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

B)Hàm f(z) = ze^{5z} có đạo hàm trên toàn mặt phẳng phức nên giải tích trên toàn mặt phẳng phức.

C) $\oint\limits_{|z-i|=4} \frac{ze^{5z}dz}{(z-1)^2} = 12\pi ie^5$ D) $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{ze^{5z}dz}{(z-1)^2} = 12\pi ie^5$

....

Chương 5

CHUỖI HÀM BIẾN PHỨC

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1 Nếu a là cực điểm cấp m của hàm f(z) thì $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$

Câu 2 Nếu a là cực điểm của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ với $(A \neq 0, A \neq \infty)$ thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z)

Câu 3 Nếu a là cực điểm cấp m của hàm f(z)thì a là cực điểm cấp 1 của hàm

$g(z) = (z - a)^{m-1}f(z)$

Câu 4 Nếu a là không điểm cấp m của hàm f(z)thì a là cực điểm cấp 1 của hàm

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}$$

Câu 5 Nếu a là cực điểm của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$ thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

Câu 6 Nếu a là cực điểm của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = 0$ thì a là cực điểm cấp < m của hàm f(z)

Câu 7 Nếu a là điểm bất thường bỏ được của hàm f(z) thì $\lim\limits_{z\to a} f(z) = 0$

Câu 8 Nếu a là cực điểm của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=0$ thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

Câu 9 Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là duy nhất.

Câu 10 Điểm z = 0 là cực điểm cấp 2 của hàm phức : $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$.

Câu 11 Điểm z = 0 là cực điểm cấp 2 của hàm phức : $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$.

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN

(Chọn một trong 4 câu : A, B, C, D)

Câu 12 Giả sử a là cực điểm cấp m của hàm f(z). Khẳng định nào sau đây sai?

A)Khai triển Laurent của f(z) quanh a có dạng:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n \text{ với } a_{-m}\neq 0.$$

B) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

C) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=0$.

D) $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$, $A\neq 0$ và $A\neq\infty$.

Câu 13 Cho hàm $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) $f(z)=z^2+z+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{z.3!}+\dfrac{1}{z^2.4!}+\dfrac{1}{z^3.5!}+\dots$

B) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

B) z = 0 là cực điểm cấp 2 của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-2|=1} z^2e^{\frac{1}{z}}dz=0$

Câu 14 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+6i)^n}{2^n+n^n}$ có bán kính hội tụ là $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+1}+(n+1)^{n+1}}{2^n+n^n}\right|=2$

D) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(6i-z)^n}{3+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-6i|<5$.

Câu 15 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B)Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C)Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)(z+8i)^n}{1+7^n}$ có bán kính hội tụ là $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{(1+7^n)}\cdot\dfrac{(1+7^{n+1})}{n+2}\right|=7$

D)Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(z+8i)^n}{1+7^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z+8i|\le 7$.

Câu 16 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là cực điểm cấp m của hàm f(z) thì $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$

B) Nếu a là cực điểm của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ với $(A \neq 0, A \neq \infty)$ thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z)

C) z = 1 là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{\sin(z-1)}{(z-1)^2}$

D) z = 1 là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{ze^z}{(z-1)^2}$

Câu 17 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là cực điểm cấp m của hàm f(z) thì khai triển Laurent của f(z) quanh điểm a có dạng : $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dfrac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + ... + \dfrac{a_{-1}}{z-a} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ với $a_{-m} \neq 0$.

B) Nếu khai triển Laurent của f(z) quanh điểm a có dạng

$f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dfrac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + ... + \dfrac{a_{-1}}{z-a} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ với $a_{-m} \neq 0$ thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

C) Hàm $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ có cực điểm đơn z = 0.

D) Hàm $f(z) = \dfrac{2}{z(z^2+1)^2}$ có 3 cực điểm là z = 0, z = i, z = -i.

Chương 6 THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1 Nếu a là điểm bất thường bỏ được của hàm f(z) thì $\text{Res}[f(z), a] = 0$.

Câu 2 Nếu a là cực điểm cấp m $(m > 1)$ của hàm f(z) thì $\text{Res}[f(z), a] \neq 0$.

Câu 3 Nếu a là điểm bất thường cốt yếu của hàm f(z) thì $\text{Res}[f(z), a] \neq 0$.

Câu 4 Nếu a là cực điểm cấp 1 của hàm f(z) thì $\text{Res}[f(z), a] \neq 0$.

Câu 5 Nếu a là cực điểm cấp m của hàm f(z) thì $\text{Res}[f(z), a] \neq 0$.

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN

(Chọn một trong 4 câu : A, B, C, D)

Câu 6 Giả sử a là cực điểm cấp k của hàm f(z). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$)   B) $\text{Res}[f(z), a] = 0$

C) z = a là điểm bất thường bỏ được của hàm $g(z) = f(z).(z-a)^k$

D)Khai triển Laurent f(z) quanh a có dạng

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-a)^k}+\frac{a_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}}+...+\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$$ với $a_{-k}\neq 0$.

Câu 7 Khẳng định nào sau đây sai?

A) $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$.

B) $\operatorname{Res}\left[ze^{\frac{1}{z}},0\right]=\frac{1}{2}$.

C) $z = 1$ là cực điểm cấp 1 của hàm $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

D) $\operatorname{Res}\left[(z-1)e^{\frac{1}{z-1}},1\right]=\frac{1}{2}$.

Câu 8 Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\oint\limits_{|z|=1} ze^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\operatorname{Res}\left[ze^{\frac{1}{z}},0\right]$ B) $\oint\limits_{|z-2|=1} ze^{\frac{1}{z}}dz=0$

C) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+1}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+1}+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x^2+1}=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+1},i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+1},-i\right]\right)$

D) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos xdx}{x^2+1}=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+1},i\right]$

Câu 9 Khẳng định nào sau đây đúng?

A) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},-2i\right]+\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},1\right]$

B) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},2i\right]+2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},-2i\right]+$
$\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},1\right]$.

C) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},-2i\right]+\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},1\right]$

D) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},2i\right]+\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z^2+4)},1\right]$

Câu 10 Đặt $A=\oint\limits_{|z|=2} e^{\left(\frac{1}{z+1}\right)}dz$. Khi đó

A)A = 0 B)A = 2π C)A = 2πi D)A = 1

Câu 11 Cho hàm f(z) = $z^2 e^{\frac{3}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) f(z) = $z^2 + 3z + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{z.3!} + \frac{3^4}{z^2.4!} + ...$

B) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz = 9i\pi$

C) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz = \operatorname{Res}[z^2 e^{\frac{3}{z}}, 0]$

Câu 12 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) Nếu a là cực điểm cấp hai của hàm $f(z)$ thì $\operatorname{Res}[f(z), a] \neq 0$

C) $z = 5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm f(z) = $\frac{z+3e^z}{(z-5i)^2}$

D) $\oint\limits_{|3i-z|=8} \frac{z+3e^z}{(z-5i)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z+3e^z}{(z-5i)^2}, 5i\right] = 2\pi i(1+3e^{5i})$

Câu 13 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ thì $\operatorname{Res}[f(z), a] = a_{-1}$

B) f(z) = $z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + ...$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

C) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi}{3}$

D) Hàm f(z)=(z+i)$\cos\frac{1}{z+i}$ = $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}}$ nên thặng dư $\operatorname{Res}\left[(z+i)\cos\frac{1}{z+i}, -i\right] = -\frac{1}{2}$.

Câu 14 ***Khẳng định nào sau đây sai?***

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) z = 4 là cực điểm cấp 3 của hàm f(z) = $\frac{e^{2z}}{(z-4)^3}$

C) $\oint\limits_{|z-4|=3} \frac{e^{2z}}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{2z}}{(z-2)^2}, 2\right] = 4\pi i e^4$

D) $\oint\limits_{|z-3i|=3} \frac{e^z}{z-3} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z-3}, 3\right]$

Câu 15 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu khai triểm Laurent hàm f(z) quanh điểm bất thường cô lập a có dạng

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{thì } \operatorname{Res}[f(z), a] = a_{-1}$$

B) Hàm $f(z)=(z+1)\cos\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n-1}}$ nên thặng dư

$$\operatorname{Res}\left[(z+1)\cos\frac{1}{z+1}, -1\right] = \frac{1}{2}.$$

C) $f(z) = z^3 e^{\frac{2}{z}} = z^3 + 2z^2 + 2z + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{z\ .4!} + \dots$ và z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-1|=3} (e^z + z^3 e^{\frac{2}{z}})dz = \oint\limits_{|z-1|=3} e^z dz + \oint\limits_{|z-1|=3} z^3 e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[z^3 e^{\frac{2}{z}}, 0\right] = \frac{4\pi i}{3}$

Câu 16 Cho hàm $f(z) = z e^{\frac{2}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) $f(z) = z + 2 + \frac{2^2}{2!\,z} + \frac{2^3}{z^2.3!} + \frac{2^4}{z^3.4!} + \dots$

B) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

C) $\oint\limits_{|z-10|=1} z e^{\frac{2}{z}} dz = 0$

D) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z e^{\frac{2}{z}} dz = \operatorname{Res}[f(z), 0]$

Câu 17 ***Khẳng định nào sau đây sai?***

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) z = 0 là cực điểm cấp 4 hàm $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^4}$

C) $\oint\limits_{|z-i|=8} \frac{e^z}{(z-2)^3} dz = \pi i e^2$

D) z = 2 là cực điểm cấp 3 của hàm $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^3}$ và $\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{(z-2)^3}, 2\right] = \frac{e^2}{2}$.

Câu 18 Cho hàm $f(z) = z^2 e^{\frac{5}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) $f(z) = z^2 + 5z + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{z.3!} + \frac{5^4}{z^2.4!} + \dots$

B) $\oint\limits_{|z-3i|=6} z^2 e^{\frac{5}{z}} dz = \frac{i\pi 5^3}{3}$

C) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z+3i|=6} z^2 e^{\frac{5}{z}} dz = \frac{i\pi 5^3}{3!}$

Chương 7 PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ ỨNG DỤNG

TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1 Nếu hàm f(t) liên tục từng khúc trên toàn trục t và có bậc mũ thì hàm g(t) = u(t)f(t) là hàm gốc.

Câu 2 Nếu f(t) là hàm gốc với chỉ số tăng s_o thì hàm F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] xác định và giải tích trên miền Re(p) > s_o.

Câu 3 Nếu f(t) , g(t) là hai hàm gốc và a, b là các hằng số thì af(t) + bg(t) cũng là hàm gốc.

Câu 4 Nếu F(P) , G(P) là hai hàm ảnh và a, b là các hằng số thì aF(p) + bG(p) cũng là hàm ảnh.

Câu 5 Nếu f(t) là hàm gốc và a > 0 là hằng số thì f(at) cũng là hàm gốc.

Câu 6 Nếu f(t) , g(t) là hai hàm gốc thì tích f(t)g(t) cũng là hàm gốc.

Câu 7 Nếu f(t), g(t) là hai hàm gốc có chỉ số tăng lần lượt là s_1, s_2 thì f(t)*g(t) là hàm gốc có chỉ số tăng là max {s_1, s_2 }.

Câu 8 Hàm $f(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 & , a < t < b \\ 0 & , t > b \end{cases}$, với 0 < a < b, có thể viết lại như sau

f(t) = u(t-a) – u(t- b)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN

(chọn 1 trong các câu: A, B, C, D)

Câu 9 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p) , $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a , b là các hằng số . Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}$[f(t) g(t)] = F(p) G(p)

C) $\mathscr{L}$[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p), a > 0

D) $\mathscr{L}$[f(t) *g(t)] = F(p) G(p)

Câu 10 Hàm $f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \le t < \pi \\ \sin t & , \pi \le t < 2\pi \\ t & , t \ge 2\pi \end{cases}$ có thể viết lại dưới như sau:

A) f(t) = u(t) – u(t-π) + sint [u(t-π) - u(t-2π)] + t u(t-2π)

B) f(t) = u(t) – u(t-π) + sin(t-π)u(t-π) - sin(t-2π) u(t-2π)] + t u(t-2π)

C) f(t) = u(t) – u(t-π) + sin(t-π)u(t-π) - sin(t-2π) u(t-2π)] + (t-2π) u(t-2π) + 2π

D) Cả A, B, C đều đúng.

<u>Câu 11</u> Cho $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p) , $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) , $\mathscr{L}$[h(t)] = H(p) . Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p).G(p).H(p)] = f(t)*g(t)*h(t)

B) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p)G(p) + F(p)H(p)] = f(t)* [g(t) + h(t)]

C) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p) + G(p)H(p)] = f(t) + g(t)h(t)

D) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p) + G(p)H(p)] = f(t) + $\left(g(t) * h(t)\right)$

<u>Câu 12</u> Cho $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p) , $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) , $\mathscr{L}$[h(t)] = H(p). Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p).G(p).H(p)] = f(t)*g(t)*h(t)

B) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p)G(p) - F(p)H(p)] = f(t)* [g(t) - h(t)]

C) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p) - G(p)H(p)] = f(t) - $\left(g(t) * h(t)\right)$

D) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p) - G(p)H(p)] = f(t) - g(t)h(t)

<u>Câu 13</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p) , $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a , b là các hằng số . Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}^{-1}\left[F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\right]$ = f(αt) , α > 0.

C) $\mathscr{L}$[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p), a > 0

D) $\mathscr{L}$[t f(t)] = -F'(p)

<u>Câu 14</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p) , $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p), $\mathscr{L}$[h(t)] = H(p) và a, b là các hằng số . Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\mathscr{L}$ [f(t) *g(t)] = F(p) G(p)

B) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p) G(p)] = $\int_0^t f(u).g(t-u)du$

C) $\mathscr{L}^{1}$[aF(p)+bG(p)–H(p)]=af(t)+bg(t)–h(t)

D) $\mathscr{L}^{-1}$ [F(p) G(p)] = $\int_0^t g(u).f(u-t)du$

<u>Câu 15</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}[2+t^2+sh3t]=\frac{2}{p}+\frac{2}{p^3}+\frac{p}{p^2-9}$

C) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(p+2)(p^2+4)}\right]=2e^{-2t}*\sin 2t$

D) $\mathscr{L}^{1}\left[\frac{p-2}{p^2-4p+40}\right]=e^{2t}\cos 6t$

<u>Câu 16</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)

C) $\mathscr{L}[6+t^3e^{-2t} - sh5t] = \dfrac{6}{p} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} - \dfrac{5}{p^2-25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{7p+18}{p^2-81}\right] = 7ch9t + 2sh9t$

<u>Câu 17</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) +bg(t)

C) $\mathscr{L}[8t+t^3e^{-2t} + \cos 5t] = \dfrac{8}{p^2} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} + \dfrac{p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{6p-18}{p^2-81}\right] = 6ch9t - 2sh9t$

<u>Câu 18</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}[2+t^2+sh3t] = \dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{3}{p^2+9}$

C) $\mathscr{L}[t\cos 2t] = -\left(\dfrac{p}{p^2+4}\right)'$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p-2}{p^2-4p+20}\right] = e^{2t}\cos 4t$

<u>Câu 19</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u}\sin u du\right] = \dfrac{1}{p((p-3)^2+1)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0<t<\pi \\ \sin 3t & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin 3t dt$$

<u>Câu 20</u> Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\mathscr{L}$[f(t)* g(t)] = $\mathscr{L}$[f(t)] $\mathscr{L}$[g(t)]

B) $\mathscr{L}^{-1}$ [F(p)G(p)] = $\mathscr{L}^{-1}$ [F(p)]* $\mathscr{L}^{-1}$ [G(p)]

C) $\mathscr{L}[5te^t + e^{2t} * \cos 3t] = \dfrac{5}{(p-1)^2} + \dfrac{3}{(p-2)(p^2+9)}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p+2} + \dfrac{4}{(p-1)(p^2+16)}\right] = e^{-2t} + e^t * \sin 4t$

<u>Câu 21</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **SAI?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) B) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p+1}{p^2+2p+5}\right]=e^{-t}\cos 2t$.

C) $\mathscr{L}\left[t\sin 2t\right]=-\left(\dfrac{2}{p^2+4}\right)'$ D) $\mathscr{L}\left[1+t^3-2t\sin t\right]=\dfrac{1}{p}+\dfrac{6}{p^3}+\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$

<u>Câu 22</u> Giả sử $\mathscr{L}$ [f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$ [g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) B) $\mathscr{L}\,[2+t^2e^{3t}+ch3t]=\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{(p-3)^3}+\dfrac{p}{p^2-9}$

C) $\mathscr{L}\left[t^3\sin 2t\right]= -\left(\dfrac{1}{p^2+4}\right)'''$ D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p+2}{p^2+4p+40}\right]=e^{-2t}\cos 6t$

<u>Câu 23</u> Giả sử $\mathscr{L}$ [f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

D) $\mathscr{L}\left[\int\limits_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$ B) $\mathscr{L}\left[\int\limits_0^t e^{5u}ch6udu\right]=\dfrac{p-5}{p\left((p-5)^2-36\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases}0 & khi\quad 0<t<\pi\\ \sin 9t\, khi & \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π)= f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}\sin 9tdt$

<u>Câu 24</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)$\mathscr{L}\left[\int\limits_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$ B) $\mathscr{L}\left[\int\limits_0^t e^{5u}ch4udu\right]=\dfrac{p-5}{p\left((p-5)^2+16\right)}$

C)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D)Nếu $f(t)=\begin{cases}\cos 6t & khi\quad 0<t<\pi\\ 0 & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int\limits_0^{\pi} e^{-pt}\cos 6tdt$$

<u>Câu 25</u> Cho $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p) , $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) , $\mathscr{L}$[h(t)] = H(p) . Khẳng định nào sau đây sai?

A) $\mathscr{L}^{-1}$[F(p) ± G(p)H(p)] = f(t) ± $\left(h(t)*g(t)\right)$

B) $\mathscr{L}$[t f(t)] = -F'(p), $\mathscr{L}$[t^2cost] = $-\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)''$

C) $\mathscr{L}$[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p), a > 0

D) $\mathscr{L}$[u(t-2) cos(3t-6)] = $e^{-2p}\dfrac{p}{p^2+9}$

<u>Câu 26</u> Để tìm gốc của hàm ảnh F(p) = $e^{\frac{1}{p}}-1-\dfrac{1}{p}$ ta làm như sau:

- Khai triển Laurent hàm F(p) ta được : $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^n} - 1 - \frac{1}{p} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^n}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được: $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^n}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!(n-1)!}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

Câu 27 Để tìm gốc của hàm ảnh F(p) = $e^{\frac{1}{p^2}} - 1$ ta làm như sau:

- Khai triển Laurent hàm F(p) ta được : $F(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^{2n}}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được:
  $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{2n}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{n!(2n-1)!}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
D) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 28 Để tìm gốc của hàm ảnh F(p) = $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}$ ta làm như sau:

- Khai triển Laurent hàm F(p) ta được : $F(p) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{np^n}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được:
  $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\ln(1+\frac{1}{p}) - \frac{1}{p}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^n}\right] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^{n-1}}{n(n-1)!}$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

C) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

D) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 29 Để giải phương trình tích phân: $y(t) = e^{2t} + 5\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)\,du$ ta làm như sau:

- Phương trình tương đương với : $y(t) = e^{2t} + 5y(t)*\cos 2t$
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$Y = \frac{1}{p-2} + 5\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 2t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-2} + 5Y\frac{p}{p^2+4}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+4}{(p-1)(p-2)(p-4)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y = $\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-2}+\dfrac{C}{p-4}$ (*với A, B, C = const*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^t+Be^{2t}+Ce^{4t}$

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 30 Để giải phương trình tích phân: y(t)= $2e^{-7t}+10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = $2e^{-7t}$+10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[2e^{-7t}] + 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{2}{p+7} + 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+7} + 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{2(p^2+9)}{(p-1)(p-9)(p+7)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-9}+\dfrac{C}{p+7}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^t+Be^{9t}+Ce^{-7t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 31 Để giải phương trình tích phân: y(t)= $e^{3t}+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$ ta làm như sau:

- Phương trình tương đương với : y(t) = e^{3t} +2y(t)*cost
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$Y = \frac{1}{p-3} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p-3} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{(p^2+1)}{(p-1)^2(p-3)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y = $\dfrac{A}{(p-1)^2}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{C}{p-3}$ (với A, B, C = const)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ate^t+Be^t+Ce^{3t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

Câu 32 Cho phương trình vi phân $y'' + y' - 2y = e^{3t}$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Để giải phương trình trên ta làm như sau:

- ♦ Đặt $Y = Y(P) = \mathscr{L}[y(t)]$ và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được:

$$p^2Y + pY - 2Y = \frac{1}{p-3} \quad (*)$$

- ♦ Giải phương trình (*) với Y là ẩn số ta được: $Y = \dfrac{1}{(p-1)(p-3)(p+2)}$
- ♦ Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được: $Y = \dfrac{5}{p-3} + \dfrac{6}{p-1} - \dfrac{1}{p+2}$
- ♦ Biếi đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm là : $y(t) = 5e^{3t} + 6e^{t} - e^{-2t}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

B) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 33 Để tìm gốc của hàm ảnh $Y = \dfrac{p^2+6}{(P-4)(P-5)(p^2+4)}$ ta làm như sau:

- ♦ Phân tích thành các phân thức đơn giản:

$$Y = \frac{p^2+6}{(P-4)(P-5)(p^2+4)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p-4} + \frac{B}{p-5} + \frac{Cp+2D}{p^2+4} \text{ với A, B, C, D là hằng số}$$

- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được $\mathscr{L}^{-1}[Y] = Ae^{4t} + Be^{5t} + C\cos 2t + D\sin 2t$
- ♦ Các hằng số A, B, C, D xác định từ đẳng thức (*).(ở đây ta không tính toán để tìm A, B, C, D)

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

B) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 34 Cho phương trình vi phân $y'' - 9y' + 20y = \sin 2t$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Để giải phương trình trên ta làm như sau:

- ♦ Đặt $Y = Y(P) = \mathscr{L}[y(t)]$ và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được:

$$p^2Y - 9pY + 20Y = \frac{2}{p^2+4} + 1 \quad (*)$$

- ♦ Giải phương trình (*) với Y là ẩn số ta được: $Y = \dfrac{p^2+6}{(P-4)(P-5)(p^2+4)}$
- ♦ Biếi đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm phương trình là: $y(t) = e^{4t} - e^{5t} + \sin 2t$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

B) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 35 Để tìm gốc của hàm ảnh $Y = \dfrac{2p^2 - 4}{(p+1)(p-2)(P-3)}$ ta làm như sau:

- Phân tích thành cácc phân thức đơn giản:

$$Y = \frac{2p^2 - 4}{(p+1)(p-2)(P-3)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3} \text{ với A, B, C là hằng số}$$

- Từ đẳng thức (*) tính được $A = \dfrac{-1}{6}$, $B = \dfrac{-4}{3}$, $C = \dfrac{7}{2}$. Suy ra

$$Y = \frac{-1/6}{p+1} - \frac{4/3}{p-2} + \frac{7/2}{p-3}$$

- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được $\mathscr{L}^{-1}[Y] = \dfrac{-1}{6}.e^{-t} - \dfrac{4}{3}.e^{2t} + \dfrac{7}{2}.e^{3t}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 36 Để tìm gốc của hàm ảnh $Y = \dfrac{p^2 + 2p + 3}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)}$ ta làm như sau:

- Phân tích thành các phân thức đơn giản: $Y = \dfrac{p^2 + 2p + 3}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)} \overset{(*)}{=}$

$$\frac{A(p+1) + B}{(P+1)^2 + 1} + \frac{C(p+1) + D}{(P+1)^2 + 4} \text{ với A, B, C, D là hằng số.}$$

- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được

$$\mathscr{L}^{-1}[Y] = Ae^{-t}\cos t + Be^{-t}\sin t + Ce^{-t}\sin 2t + De^{-t}\cos 2t$$

- Các hằng số A, B, C, D xác định từ đẳng thức (*) bằng cách lần lượt cho p =0, p =-1, p=-2, p =1 ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3}{10} = \dfrac{A+B}{2} + \dfrac{C+D}{5} \\ \dfrac{1}{2} = B + \dfrac{D}{4} \\ \dfrac{3}{10} = \dfrac{-A+B}{2} + \dfrac{-C+D}{5} \\ \dfrac{3}{20} = \dfrac{2A+B}{5} + \dfrac{2C+D}{8} \end{cases} \text{(ở đây ta không tính toán để tìm A, B, C, D)}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

B) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

C) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

Câu 37 Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x' = -3y \\ y' + x + 2y = 0 \end{cases}$, với điều kiện x(0) = 1, y(0) = 2

ta làm như sau:

- Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP + 3Y = 1 \\ X + (P+2)Y = 2 \end{cases}$
- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X = \dfrac{P-4}{(P-1)(P+3)} \\ Y = \dfrac{2P-2}{P^2+2P-3} \end{cases}$
- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X = \dfrac{A}{P-1} + \dfrac{B}{P+3} \\ Y = \dfrac{C}{P-1} + \dfrac{D}{P+3} \end{cases}$ với A, B, C, D là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x = Ae^{t} + Be^{-3t} \\ y = Ce^{t} + De^{-3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

C) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

D) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 38 Cho phương trình vi phân: y'-3y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 16.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-3Y = $\dfrac{e^{-5p}}{p-2}$ +16 (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được: Y= $\dfrac{e^{-5p}}{(p-2)(p-3)} + \dfrac{16}{p-3}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được:

$$Y = e^{-5p}\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2}\right) + \frac{16}{p-3}$$

- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{3(t-5)} - e^{2(t-5}\right)u(t-5) + 16e^{3t}$

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 39 Cho phương trình vi phân: y'+6y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 14.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY+6Y = $\dfrac{e^{-5p}}{p-2}$ +14 (2)

♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được: Y=$\dfrac{e^{-5p}}{(p-2)(p+6)}+\dfrac{14}{p+6}$ (3)

♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được:

$$Y = \frac{1}{8}e^{-5p}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+6}\right)+\frac{14}{p+6}$$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm:

$$y = \frac{1}{8}\left(e^{2(t-5)}-e^{-6(t-5)}\right)u(t-5)+14e^{-6t}$$

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 40 Cho phương trình vi phân: y'-10y = u(t-π)$e^{t-\pi}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 0.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: pY-10Y = $\dfrac{e^{-\pi p}}{p-1}$ (2)

Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-\pi p}}{(p-1)(p-10)}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{e^{-\pi p}}{9}\left(\dfrac{1}{p-10}-\dfrac{1}{p-1}\right)$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{9}\left(e^{10(t-\pi)}-e^{(t-\pi)}\right)u(t-\pi)$

A) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
B) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Murray R. Spiegel, *Theory and problems of Complex variables*, Schaum's Outline Series McGraw-Hill, Inc, 1964.

[2] Murray R. Spiegel, *Laplace transforms*, Schaum's Outline Series McGraw-Hill , Inc 1965.

[3] Stephen W.Goode , *An Introduction to diffential and linear algebra*, Prentice-Hall International Editions.

[4] Nguyễn Kim Đính, *Hàm phức và ứng dụng* , Trường Đại học Kỹ thuật Tp.Hồ Chí Minh 1998.

[5] Nguyễn Kim Đính, *Phép biến đổi Laplace,* Trường Đại học Kỹ thuật Tp.Hồ Chí Minh 1998.

[6] Võ Đăng Thảo, *Hàm phức và toán tử Laplace*, Trường Đại học Kỹ thuật Tp.Hồ Chí Minh 2000.

[7] Phan Bá Ngọc, *Hàm biến phức và phép biến đổi Laplace*, NXB Giáo dục 1996.

[8] Đậu Thế Cấp, *Hàm một biến phức*, NXB Giáo dục 2000.